

§8. 正規性

定義 8.1 L/K を代数拡大とする. L の任意の元について, その K 上の共役元がすべて L に属するとき, L は K 上正規であるといい, L/K を正規拡大という.

命題 8.2 M が正規拡大 L/K の中間体ならば, L/M は正規拡大である.

定理 8.3 代数拡大 L/K について, 次は同値である.

- (i) L/K は正規拡大である.
- (ii) すべての $\alpha \in L$ に対して $\text{Conj}(\alpha, K) \subset L$.
- (iii) すべての $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) \subset L$.
- (iv) すべての $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) = L$.

系 8.4 $L/K, M/K$ を体の拡大とする.

- (1) L/K が正規拡大ならば, LM/M も正規拡大である.
- (2) $L/K, M/K$ がともに正規拡大ならば $LM, L \cap M$ はどちらも K 上正規である.

定義 8.5 体 K 上の多項式 $f(X)$ に対して, その $\overline{K}[X]$ での分解を

$$f(X) = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n), \quad a \in K^\times, \quad \alpha_i \in \overline{K}$$

とするとき, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を $f(X)$ の K 上の最小分解体という.

例 8.6 ω を 1 の原始 3 乗根とし,

$$K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}), \quad M = \mathbf{Q}(\omega), \quad L = KM = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}, \omega)$$

とおく ($M = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}), L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-3})$ とも表せることに注意).

- (a) K/\mathbf{Q} は正規拡大ではない.
- (b) M/\mathbf{Q} は正規拡大である.
- (c) L は, $X^3 - 5$ の \mathbf{Q} 上の最小分解体であり, \mathbf{Q} 上正規である.

定理 8.7 有限次拡大 L/K について、次は同値である。

- (i) L/K は正規拡大である。
- (ii) L は K 上のある多項式の K 上の最小分解体である。

定理 8.8 α が体 K 上代数的であるとき、次は同値である。

- (i) $K(\alpha)/K$ は正規拡大である。
- (ii) $K(\alpha)$ は α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体である。
- (iii) $|\text{Aut}(K(\alpha)/K)| = |\text{Conj}(\alpha, K)|$ が成り立つ。

例 8.9 自然数 n に対して ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする。すなわち、 $\zeta_n \in \mathbf{C}^\times$ であって、その位数が n であるとする ($\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ であるとしてよい)。

- (a) $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ は \mathbf{Q} 上正規である。
- (b) \mathbf{Q} 上の拡大体 K が $\zeta_n \in K$ をみたすとき、任意の $a \in K$ に対して $K(\sqrt[n]{a})/K$ は正規拡大である。

例 8.10 (1) 任意の体 K の任意の 2 次拡大体は K 上正規である。

- (2) $f(X) = X^3 + 3X + 1$ の実数根はただひとつであり、それを α とすると、他の根 (\mathbf{Q} 上の共役元) は実数ではないから $\mathbf{Q}(\alpha)$ に属さない。よって $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ は正規ではない。
- (3) $g(X) = X^3 - 3X + 1$ の任意のひとつの根を β とすると、 $\mathbf{Q}(\beta)/\mathbf{Q}$ は正規拡大である。実際、他の 2 根が $\frac{1}{1-\beta}$, $1 - \frac{1}{\beta}$ であることが確かめられるので、 $\mathbf{Q}(\beta)$ は $g(X)$ の \mathbf{Q} 上の最小分解体である。

定義 8.11 L/K を代数拡大とする。 $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ によって $\sigma(L)$ で表される体を L の K 上の共役体、あるいは簡単に L/K の共役体という。

定義 8.12 代数拡大 L/K に対して、 L を含む K 上の最小の正規拡大体を L/K の正規閉包という。

命題 8.13 α が K 上代数的であるとき、 $K(\alpha)/K$ の正規閉包は $K(\text{Conj}(\alpha, K))$ である。