

§4. 代数拡大

定義 4.1 L/K を体の拡大とする. L の任意の元が K 上代数的であるとき, L は K 上代数的であるという. また, L/K を代数拡大という. L が K 上代数的でないとき, L は K 上超越的であるといい, L/K を超越拡大という.

命題 4.2 有限次拡大は代数拡大である.

命題 4.3 体の拡大 L/K に対して次は同値である.

- (i) L/K は有限次拡大である.
- (ii) K 上代数的な有限個の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ が存在して, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が成り立つ.

定理 4.4 M を体の拡大 L/K の中間体とするとき, 次は同値である.

- (i) L/K は代数拡大である.
- (ii) $L/M, M/K$ はともに代数拡大である.

定理 4.5 L/K を体の拡大とする. $\alpha, \beta \in L$ がともに K 上代数的ならば, それらの和, 差, 積, 商

$$\alpha + \beta, \quad \alpha - \beta, \quad \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

も K 上代数的である. ただし, 商は $\beta \neq 0$ のときのみ考える.

補題 4.6 L/K を体の拡大とし, $A \subset L$ とすると, $K(A)$ は A の有限部分集合 B のすべてを走らせることにより

$$K(A) = \bigcup_B K(B)$$

と表される. すなわち, 任意の $\alpha \in K(A)$ に対して, $\alpha \in K(\beta_1, \dots, \beta_n)$ であるような有限個の $\beta_1, \dots, \beta_n \in A$ がとれる.

定理 4.7 L/K を体の拡大とし, $A \subset L$ とする. A の任意の元が K 上代数的ならば $K(A)/K$ は代数拡大である.

命題 4.8 L/K を体の拡大とし, M をその中間体とする. $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとき,

$$[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ.

例 4.9 $X^3 - 1$ の 1 でない根のひとつを ω とする (1 の原始 3 乗根). このとき, ω, ω^2 は $X^2 + X + 1$ の 2 根である. $X^3 - 2$ の実根を α とすれば, 他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$ で与えられる. $X^3 - 2$ は \mathbb{Q} 上既約だから, 定理 3.5 より $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は 3 次拡大である. このとき,

- (a) $M = \mathbb{Q}(\omega)$ とおけば, $[M(\alpha) : M] = 3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$,
- (b) $L = \mathbb{Q}(\alpha\omega)$ とおけば, $[L(\alpha) : L] = 2 < 3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

が成り立ち, それぞれ, 前命題において, 等号が成り立つ例, 成り立たない例となっている.

定義 4.10 Ω/K を体の拡大とし, L, M をその中間体とするとき, L, M をともに含む Ω の最小の部分体を L, M の合成体といい LM で表す. すなわち, $LM = L(M) = M(L)$ である.

定理 4.11 L, M を体の拡大 Ω/K の中間体とする.

- (1) L, M がともに K 上有限次ならば, LM も K 上有限次である.
- (2) L, M がともに K 上代数的ならば, LM も K 上代数的である.

定理 4.12 L, M を体の拡大 Ω/K の中間体とすると,

$$[LM : M] \leq [L : K]$$

が成り立つ.