

代数II 小テスト 2017-12-12

答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて, 正しいものには○を, 正しくないものには×をカッコ内に記せ. ただし, \bar{K} は体 K の代数的閉包である.

- (○) $\text{Conj}(1 + \sqrt{3}, \mathbb{Q}) = \{1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$ が成り立つ.
【解説】 $1 + \sqrt{3}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $(X - 1)^2 - 3$ の根は $1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ である.
- (×) $\sqrt[3]{5} + 7$ と $\omega\sqrt[3]{5} - 7$ は \mathbb{Q} 上共役である. ここで, ω は1の原始3乗根とする.
【解説】 $\sqrt[3]{5} + 7$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式は $(X - 7)^3 - 5$ だが, $\omega\sqrt[3]{5} - 7$ の最小多項式は $(X + 7)^3 - 5$ であって一致しない.
- (×) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ と $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上共役である.
【解説】 $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上の最小多項式は $(X \mp \sqrt{3})^2 - 2 = X^2 \mp 2\sqrt{3}X + 1$ (複合同順) であって一致しない.
- (○) 体 K と $\alpha, \beta \in \bar{K}$ に対して, $\text{Conj}(\alpha, K) \cap \text{Conj}(\beta, K) \neq \phi$ ならば, $\text{Conj}(\alpha, K) = \text{Conj}(\beta, K)$ が成り立つ.
【解説】 $\gamma \in \text{Conj}(\alpha, K) \cap \text{Conj}(\beta, K)$ とすると, α, γ は K 上共役で, かつ β, γ も K 上共役, よって α, β は K 上共役である. そこで, $\delta \in \text{Conj}(\alpha, K)$ ならば, α, δ が共役より, β, δ が共役, よって $\delta \in \text{Conj}(\beta, K)$ であり, $\text{Conj}(\alpha, K) \subset \text{Conj}(\beta, K)$. 逆も同様.
- (×) 体 K と $\alpha \in \bar{K}$ に対して $|\text{Conj}(\alpha, K)| > [K(\alpha) : K]$ が成り立つ.
【解説】 $\text{Conj}(\alpha, K)$ は α の K 上の最小多項式 $f(X)$ の根全体の集合だから, $|\text{Conj}(\alpha, K)| \leq \deg f(X) = [K(\alpha) : K]$.
- (○) L/K を体の拡大とし $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ とすると, 任意の $\alpha \in L$ に対して $\sigma(\alpha) \in \text{Conj}(\alpha, K)$ が成り立つ.
【解説】 α と $\sigma(\alpha)$ は K 上共役である.
- (○) 体の拡大 L/K の任意の中間体 M に対して, $\text{Aut}(L/M) \subset \text{Aut}(L/K)$ が成り立つ.
【解説】 $\sigma \in \text{Aut}(L/M)$ ならば, $\sigma : L \rightarrow L$ は準同型であって, 任意の $x \in M$ に対して $\sigma(x) = x$. 一方, $K \subset M$ であるから, $x \in K$ についても $\sigma(x) = x$ であり $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$.

(×) 体の拡大 L/K の任意の中間体 M に対して, $\text{Aut}(M/K) \subset \text{Aut}(L/K)$ が成り立つ.

【解説】 $\sigma \in \text{Aut}(M/K)$ とする. $M \subsetneq L$ であるとき, $\sigma: M \rightarrow M$ を L から L への写像とみなす自然な方法がない.

[問2] 以下の α と K について, $\text{Conj}(\alpha, K)$ を求めよ.

(あ) $\alpha = \sqrt[4]{3} - 2$, $K = \mathbb{Q}$

【解】 α の \mathbb{Q} 上の最小多項式は $(X+2)^4 - 3$ であり, 根を求めれば

$$\left\{ \sqrt[4]{3} - 2, i\sqrt[4]{3} - 2, -\sqrt[4]{3} - 2, -i\sqrt[4]{3} - 2 \right\}$$

ただし, i は虚数単位とする.

(い) $\alpha = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

【解】 α の \mathbb{Q} 上の最小多項式は $(X^2 - \sqrt{3})^2 - 2$ であり, 根を求めれば

$$\left\{ \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, -\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, -\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \right\}$$