

代数II 小テスト 2018-12-05

答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには○を、正しくないものには×をカッコ内に記せ。

- (○) 実数 x, y がどちらも \mathbb{Q} 上代数的ならば、複素数 $x + y\sqrt{-1}$ も \mathbb{Q} 上代数的である。

【解説】 $\sqrt{-1}$ は \mathbb{Q} 上代数的だから、体 $\mathbb{Q}(x, y, \sqrt{-1})$ は \mathbb{Q} 上の代数拡大体であり $x + y\sqrt{-1}$ はそれに属している。

- (○) x, y を実数とする。複素数 $x + y\sqrt{-1}$ が \mathbb{Q} 上代数的ならば、 x, y はどちらも \mathbb{Q} 上代数的である。

【解説】 $\alpha = x + y\sqrt{-1}$ が \mathbb{Q} 上代数的であるとし、その最小多項式を $f(X)$ とする。 $f(\alpha) = 0$ の複素共役をとって $f(\bar{\alpha}) = 0$ 、したがって $\bar{\alpha} = x - y\sqrt{-1}$ も \mathbb{Q} 上代数的。よって、 $x = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$, $y = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2\sqrt{-1}}$ も \mathbb{Q} 上代数的。

- (○) 体 K 上のふたつの有限次拡大体 L, M が K 上同型ならば、つねに $[L : K] = [M : K]$ が成り立つ。

【解説】 体の K 上の同型写像は、 K 上の線形同型写像だから L, M の K 上の次元は等しい。

- (×) 体 K 上のふたつの有限次拡大体 L, M が $[L : K] = [M : K]$ をみたすならば、つねに K 上同型である。

【解説】 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ はどちらも \mathbb{Q} 上の2次拡大体であるが、 \mathbb{Q} 上同型ではない。もし、 \mathbb{Q} 上の同型写像 $\sigma : L \rightarrow M$ があつたとすると、 $\sigma(\sqrt{2})^2 = \sigma((\sqrt{2})^2) = \sigma(2) = 2$ だから $\sigma(\sqrt{2})$ は $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ のどちらかに一致、したがって $\sqrt{2} \in M$ であるが、 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ は \mathbb{Q} 上一次独立だから $[M : \mathbb{Q}] > 2$ となって矛盾。

- (○) ガウスが初めて証明したとされる『代数学の基本定理』は、 \mathbb{C} が代数的閉体であることを主張している。

【解説】 そゆこと。

- (○) L が \mathbb{Q} を含む代数的閉体ならば、任意の整数 n について $\sqrt{n} \in L$ が成り立つ。

【解説】 \sqrt{n} は \mathbb{Q} 上代数的だから L 上も代数的、よって $\sqrt{n} \in L$ 。

(○) \mathbb{Q} 上代数的な複素数全体の集合は、代数的閉体である。

【解説】 \mathbb{Q} 上代数的な複素数全体の集合を L とおくと、 L は \mathbb{Q} 上の代数拡大体である。 α が L 上代数的ならば、その L 上の最小多項式を $f(X)$ とするとき、 $f(\beta) = 0$ をみたす $\beta \in \mathbb{C}$ が存在する（だって、 $L \subset \mathbb{C}$ かつ \mathbb{C} は代数的閉体だもん）。 β は L 上代数的、よって \mathbb{Q} 上も代数的だから $\beta \in L$ 。 したがって $f(X)$ は 1 次式であり $\alpha \in L$ 。

(○) 代数的閉体は無限集合である。

【解説】 L を代数的閉体とする。 もし L が有限集合だとすると、 L 上の多項式 $f(X) = \prod_{\alpha \in L} (X - \alpha) + 1$ は L で根をもたない。

(○) L が体 K の代数的閉包ならば、 L/K の任意の中間体 M について、 L は M の代数的閉包である。

【解説】 L/K が代数拡大だから L/M も代数拡大。

(○) L を体 K の代数的閉包とし、 $F(X, Y)$ を定数でない K 上の 2 変数多項式とすると、 $F(x, y) = 0$ をみたす $x, y \in L$ が存在する。

【解説】 $F(X, Y)$ が X についての多項式 (Y を含まない) ならば、 L が代数的閉体なので $F(x, 0) = 0$ をみたす $x \in L$ がとれる。 $F(X, Y)$ が X も Y も含む場合には、 Y の多項式としての最高次の項を $f(X)Y^n$ ($n > 0, f(X) \in K[X]$) とするとき、 $f(x) \neq 0$ である $x \in L$ がとれて（だって L は無限集合だもん）、 $F(x, Y)$ は定数でない L 上の n 次多項式となるから $F(x, y) = 0$ をみたす $y \in L$ が存在する。（もっと簡単に証明できそうだなあ...）