

代数II 小テスト 2017-11-08

答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには○を、正しくないものには×をカッコ内に記せ。ただし、 L/K を体の拡大、 $\alpha \in L$ とし、写像

$$\varphi: K[X] \longrightarrow L, \quad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える。

- (○) 写像 φ は (可換環の) 準同型写像である。
【解説】 $g(X), h(X) \in K[X]$ ならば、 $\varphi(g(X)h(X)) = g(\alpha)h(\alpha) = \varphi(g(X))\varphi(h(X))$ 。
- (○) $\frac{1}{\alpha^2+1} \in \text{Im } \varphi$ ならば、 α は K 上代数的である。
【解説】 $\frac{1}{\alpha^2+1} = \varphi(h(X)) = h(\alpha)$ をみたす $h(X) \in K[X]$ がとれるから、 $g(X) = (X^2+1)h(X) - 1$ とおけば、 $g(\alpha) = (\alpha^2+1)h(\alpha) - 1 = 0$ 。
- (×) α が K 上超越的ならば、 $\text{Im } \varphi$ は体である。
【解説】 もし体ならば $1/\alpha \in \text{Im } \varphi$ であり、前問と同様にして、 α は K 上代数的。
- (×) $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ならば、 α は K 上代数的である。
【解説】 $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ より、 $g(\alpha) = 0$ となる K 上の多項式 $g(X)$ は (零多項式の他に) 存在しない。
- (○) α が K 上代数的で、 $f(X)$ が α の K 上の最小多項式ならば、 $\text{Ker } \varphi = (f(X))$ が成り立つ。
【解説】 $f(\alpha) = 0$ より $f(X) \in \text{Ker } \varphi$ 。さらに $f(X)$ は K 上既約だから $(f(X))$ は極大イデアル。よって $(f(X)) = \text{Ker } \varphi$ 。
- (×) $f(\alpha) = 0$ をみたす K 上の任意の多項式 $f(X)$ に対して、体 $K(\alpha)$ は剰余環 $K[X]/(f(X))$ と同型である。
【解説】 $f(X)$ が K 上既約でないと、 $K[X]/(f(X))$ は体ではない。
- (×) \mathbb{R} 上の任意の3次多項式 $f(X)$ に対して、剰余環 $\mathbb{R}[X]/(f(X))$ は体である。
【解説】 3次多項式 $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ は必ず実根をもつから、それを $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると $X - \alpha$ は $f(X)$ の因子である。よって $f(X)$ は \mathbb{R} 上既約ではない。

(○) \mathbb{C} は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ と同型である.

【解説】 $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$, $g(X) \mapsto g(\sqrt{-1})$ は全射準同型で核は $(X^2 + 1)$.

(×) \mathbb{C} は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 3)$ とは同型ではない.

【解説】 α を $X^2 + X + 3$ の根のひとつとする (具体的には, たとえば $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-11}}{2}$ であるとしてよい). このとき, 写像 $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$, $g(X) \mapsto g(\alpha)$ が全射準同型で核が $(X^2 + X + 3)$ であることが (少しめんどうだけど) 確かめられる.

[問 2] α を $X^3 - X - 1$ の根とするとき, $\frac{1}{\alpha^2 + 1} = a + b\alpha + c\alpha^2$ をみたす有理数 a, b, c を定めよ.

【解説】 $(\alpha^2 + 1)(a + b\alpha + c\alpha^2) = 1$ の左辺を, $\alpha^3 = \alpha + 1$, $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$ を使って変形すれば,

$$(a\alpha^2 + b\alpha^3 + c\alpha^4) + (a + b\alpha + c\alpha^2) = (a + b) + (2b + c)\alpha + (a + 2c)\alpha^2 = 1.$$

よって, $a + b = 1$, $2b + c = a + 2c = 0$ となるから, これらを連立させて

$$\boxed{a = \frac{4}{5}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = -\frac{2}{5}}.$$