

代数II 小テスト 2017-10-18

学年	学籍番号	氏名

[問1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには○を，正しくないものには×をカッコ内に記せ．ただし L/K は体の拡大で， $\alpha \in L$ である．

- () $[K(\alpha) : K] = 1$ ならば $\alpha \in K$ が成り立つ．
- () $f(X)$ が $f(\alpha) = 0$ をみたす零でない K 上の多項式ならば，一般に， $[K(\alpha) : K] \leq \deg f$ が成り立つ．
- () $f(\alpha) = 0$ かつ $[K(\alpha) : K] < \deg f$ をみたす K 上の既約多項式 $f(X)$ が存在する．
- () α が K 上の多項式 $f(X)$ の根ならば， $f(X)$ はつねに α の K 上の最小多項式である．
- () $X^4 - 4$ は $\sqrt{2}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式である．
- () $X^2 - \pi^2$ は π の $\mathbb{Q}(\pi^2)$ の最小多項式である．

[問2] 以下の α と K について， α の K 上の最小多項式を求めよ．

(あ) $\alpha = 10 - \sqrt{5}$, $K = \mathbb{Q}$

(い) $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $K = \mathbb{Q}$

(う) $\alpha = \frac{1}{\beta}$, ただし β は $X^5 + 2X + 6$ の根, $K = \mathbb{Q}$

(え) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{-2}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$