

代数II 小テスト 2017-09-27

答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには○を、正しくないものには×をカッコ内に記せ。

- (×) すべての自然数 $n \geq 2$ に対して、 n 次方程式は解の公式を持つ。
【解説】 $n \geq 5$ のとき、 n 次方程式の解の公式は存在しない(今後、講義で詳しく説明する)。
- (○) 3 次方程式の解の公式は、1 の原始 3 乗根を使って表される。
【解説】 解の公式を見よ。
- (×) $(1 - xy)(x - y)$ は、2 つの不定元 x, y に関する対称式である。
【解説】 与式を $f(x, y)$ とおけば、 $f(x, y) = -f(y, x)$ である。
- (○) $(x - yz)(y - zx)(z - xy)$ は、3 つの不定元 x, y, z に関する対称式である。
【解説】 3 次対称群 S_3 は、互換 $(1\ 2), (1\ 3)$ で生成されるから、 x, y の入れ替え、 x, z の入れ替えで不変かどうか調べればよい。それらは簡単にチェックできて対称式であることが確認できる。
- (×) $x^2 + y^2$ は、3 つの不定元 x, y, z に関する対称式である。
【解説】 与式を $f(x, y, z)$ とおけば、 $f(y, z, x) = y^2 + z^2 \neq f(x, y, z)$ 。
- (○) n 個の不定元に関する基本対称式は n 個ある。
【解説】 1 次基本対称式から n 次基本対称式まで、ちょうど n 個ある。
- (○) n 個の不定元に関する対称式 f, g に対して、和 $f + g$ や積 fg も対称式である。
【解説】 定義にしたがえば、対称式である。
- (×) n 個の不定元に関する対称式 f, g に対して、差 $f - g$ は対称式ではない。
【解説】 定義にしたがえば、対称式である。

[問2] 3 つの不定元 x, y, z に関する対称式 $x^3 + y^3 + z^3$ を、基本対称式

$$s = x + y + z, \quad t = xy + yz + zx, \quad u = xyz$$

の多項式として表せ。

【解説】 $(x^3 + y^3 + z^3) - s^3 = -3(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) - 6xyz$,
 $(x^3 + y^3 + z^3) - s^3 + 3st = 3xyz = 3u$. よって $x^3 + y^3 + z^3 = \boxed{s^3 - 3st + 3u}$.

[問3] 方程式 $X^3 - X + 5 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき,

$$\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta)$$

の値を求めよ.

【解説】 $\alpha + \beta + \gamma = -(2\text{次の係数}) = 0$ だから, 与式 $= -\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3$.
よって, 前問より 与式 $= -3(-(\text{定数項})) = \boxed{15}$.