

代数 I 期末試験問題 July 15, 2026 (中野 伸)

- 解答は、結論だけでなく、必要に応じて結論に至る考え方も簡潔に書くこと。

- [1] G を群, $x \in G$ とするとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) x の位数が 108 であるとき, x^4, x^5, x^{123} の位数をそれぞれ求めよ.
 - (2) G の位数が素数のとき, $x \neq e$ ならば $G = \langle x \rangle$ であることを示せ.
 - (3) N を G の正規部分群とする. N の指数が $(G : N) = 8$ かつ x の位数が奇数ならば, $x \in N$ であることを示せ.
- [2] $\mathbb{Z}$ から $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ への写像 $h(n) = e^{\pi i n/7}$ を考える.
- (1) h は加法群 $\mathbb{Z}$ から乗法群 T への準同型写像であることを示せ.
 - (2) h の核 $\text{Ker}(h)$ を求めよ.
 - (3) h の像 $\text{Im}(h)$ の位数を求めよ.
- [3] $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathbb{Q}$ の部分集合 $R_n = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \not\equiv 0 \pmod{n} \right\}$ を考える. 以下を示せ.
- (1) R_5 は $\mathbb{Q}$ の部分環であり, R_6 は部分環ではない.
 - (2) R_5 において, 単項イデアル (5) に属さない元はすべて可逆元である.
 - (3) R_5 において, (5) はただ一つの極大イデアルである.
- [4] ω を 1 の原始 3 乗根, すなわち $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ をみたす複素数とする. $\mathbb{C}$ の部分環 $R = \mathbb{Z}[\omega]$ について, 以下の問に答えよ.
- (1) $R = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ であることを示せ.
 - (2) 写像 $f_m : R \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を $f_m(a + b\omega) = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と定める (ただし, $m \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$). このとき, f_3 は環準同型写像であり, f_4 はそうではないことを示せ.
 - (3) 前問の f_3 に準同型定理を適用して, 環同型 $R/(1 - \omega) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を導け. (ヒント: $(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 3$ を確かめ, $\text{Ker}(f_3)$ の決定に応用せよ.)