

代数 I 期末試験問題 July 15, 2025 (中野 伸)

- 解答は、結論だけでなく、必要に応じて結論に至る考え方も簡潔に書くこと.

[1] 位数 24 の群 G について、以下の問いに答えよ.

- (1) G が x を生成元とする巡回群であるとする. $0 \leq j < 24$ のうち, x^j の位数が 8 であるような j をすべて求めよ.
- (2) 任意の素数 p と任意の自然数 n に対して, G から加法群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ への (群の) 準同型写像は単射ではないことを示せ.

[2] 一般線形群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ の部分集合

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) M, N はどちらも乗法群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ の部分群であることを確かめよ.
- (2) M は可換群かそうでないか理由を添えて答えよ.
- (3) N は M の正規部分群かそうでないか理由を添えて答えよ.

[3] 単位元 1 を持つ可換環 R について、以下の問に答えよ.

- (1) R のイデアル I, J に対して, $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ は R のイデアルであることを示せ.
- (2) R のイデアルの増加列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \cdots$ について $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ は R のイデアルであることを示せ.
- (3) R の素イデアルの定義を書け. また, P が R の素イデアルならば, 剰余環 R/P は整域であることを示せ.

[4] $\mathbb{C}$ の部分環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ から $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ への写像 f を $f(a + b\sqrt{-2}) = \overline{a + 3b} \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ と定めるとき、以下の問に答えよ.

- (1) $f: \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \rightarrow \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ は (環の) 準同型写像であることを示せ.
- (2) f に準同型定理を適用して, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]/(3 - \sqrt{-2})$ と $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ は同型であることを示せ.