代数 I　期末試験問題　July 24, 2024　(中野 伸)

- 解答は，結論だけでなく，必要に応じて結論に至る考え方も簡潔に書くこと．

[1]　A を乗法群 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ の部分群で $\{2, 3\}$ によって生成されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 以下の有理数を，A に属するものと属さないものに分類せよ．

$$-1, \quad -\frac{8}{9}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{136}{160}, \quad 1, \quad \frac{441}{7}, \quad 108, \quad 2024$$

(2) 加法群 $\mathbb{Z}$ ふたつの直積群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}^*$ への写像 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*$ を $f(m, n) = 2^m 3^n$ で定める．f に群の準同型定理を適用して，A と $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ が同型であることを示せ．

[2]　以下のそれぞれの命題について，正しい場合はその証明を，正しくない場合はその理由を説明せよ．

(1) $\mathbb{R}$ の部分環 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ において，イデアル $(5+\sqrt{2})$ は $3 + 5\sqrt{2}$ を含む．

(2) R を単項イデアル整域 (PID) とする．p が R の既約元ならば，イデアル (p) は R の極大イデアルである．

[3]　$\mathbb{C}$ の部分環 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right] = \left\{ a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への写像 $f : \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right] \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ を $f(a + b\sqrt{-3}) = \overline{a - 2b}$ と定める．

(1) f は環準同型写像であることを確かめよ．

(2) $\mathrm{Ker}(f) \subset (2 + \sqrt{-3})$ であることを示せ．

(3) $2 + \sqrt{-3}$ は $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ の素元であることを示せ．

[4]　$\mathbb{Z}$ 上の多項式 $g(X) = 3X^4 - 6X^2 + 4X - 1$ について，以下の問に答えよ．

(1) $g(X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ の既約元ではないことを示せ．

(2) $g(X)$ を $\mathbb{Q}[X]$ の元とみなすとき，$\mathbb{Q}[X]$ の極大イデアル M で $g(X) \in M$ をみたすものをひとつ求めよ．

(3) $g(X) + 2$ は $\mathbb{Z}[X]$ における既約多項式であることを示せ．