代数 I　中間試験問題 May 29, 2024　(中野 伸)

[1]　以下の問いに答えよ．

(1) ある群の部分群 H, K の位数はそれぞれ 483, 529 であり，かつ $H \cap K$ は単位群ではないという． $H \cap K$ の位数を求めよ．

(2) 4 次対称群 S_4 の部分集合 $F = \{\, \sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4 \,\}$ は，S_4 の部分群であることを示せ． また，正規部分群かどうか答えよ．

[2]　実数を成分とする 2 次正則行列のつくる乗法群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ において，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

によって生成される部分群 $H = \langle A, B \rangle$ を考える．

(1) A, B の位数をそれぞれ求めよ．

(2) H は可換群かそうでないか答えよ．

(3) H の位数を求めよ．

[3]　乗法群 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ から加法群 $\mathbb{R}$ への写像 $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ を $f(z) = \log |z|$ で定める．

(1) f は準同型写像であることを示せ．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ を求めよ．

(3) f に準同型定理を適用して得られる群の同型について説明せよ．

[4]　乗法群 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ の部分集合

$$U = \left\{ 1 + \frac{b}{a} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ a \not\equiv 0 \pmod 7,\ b \equiv 0 \pmod 7 \right\}$$

を考える．

(1) U は $\mathbb{Q}^*$ の部分群であることを示せ．

(2) $\pi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*/U$ を自然な全射準同型写像とするとき，$\pi(2)$ の位数を求めよ．