代数 I　期末試験問題　July 26, 2023　(中野 伸)

- 答案には，結論だけでなく結論に至る考え方を**簡潔**に書くこと．

$\boxed{1}$ 群 G と自然数 n に対して，$G^{(n)} = \{ a \in G \mid a^n = e \}$ と定める．

[1] もし $G^{(n)}$ が G の部分群ならば，じつは正規部分群であることを示せ．

[2] 3 次対称群 S_3 に対して，$S_3^{(2)}$，$S_3^{(3)}$ を求め，それぞれ S_3 の部分群かそうでないか答えよ．

$\boxed{2}$ 多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ のイデアル $I = (2X-1)$ について以下の問いに答えよ．

[1] $I + (4) = \mathbb{Z}[X]$ が成り立つことを示せ．

[2] 剰余環 $\mathbb{Z}[X]/I$ において $\overline{X-1}$ は可逆元であることを示し，逆元を求めよ．

[3] 剰余環 $\mathbb{Z}[X]/I$ において $\overline{X-2}$ は可逆元ではないことを示し，このことから，I が $\mathbb{Z}[X]$ の極大イデアルでないことを導け．

$\boxed{3}$ 環 $R = \left\{ a + b\sqrt{-7} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ について以下の命題を証明せよ．

[1] R において 2 は既約元であるが，素元ではない．

[2] p を奇素数とする． -7 が p を法として平方非剰余ならば，p は R の素元である．

[3] R のイデアル $(2, 1+\sqrt{-7})$ は極大イデアルである．

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．

[1] 整域 S において，素元 q が (1) でない単項イデアル J に属するならば，$J = (q)$ であることを示せ．

[2] $\mathbb{Q}$ 上の多項式環から直積環への準同型写像

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \qquad f(X) \mapsto (f(1), f(-1))$$

の核と像を求めよ．