

代数 I 中間試験問題 June 5, 2014 (中野 伸)

- [1] 群 G の部分群 A, B のそれぞれの位数が互いに素ならば, $A \cap B = \{e\}$ であることを証明せよ.

- [2] 有理数を成分とする 2 次正則行列全体からなる乗法群 $\text{GL}(2, \mathbb{Q})$ の部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

に対して, 次を示せ (注: どちらも, 部分群であることを確かめる必要はない).

- (1) H は $\text{GL}(2, \mathbb{Q})$ の正規部分群でない.
- (2) N は H の正規部分群である.

- [3] 群 G の空でない部分集合 S と自然数 n に対して,

$$S^n = \{ s_1 s_2 \cdots s_n \mid s_1, s_2, \dots, s_n \in S \}$$

によって S^n を定義するとき, 次を示せ.

- (1) $S = S^2$ ならば, 任意の自然数 n に対して $S = S^n$ である.
- (2) S が G の部分群ならば $S = S^2$ である.
- (3) G が有限群のとき, $S = S^2$ ならば S は G の部分群である.

- [4] 乗法群 $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ の部分群 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) 加法群 \mathbb{R} から乗法群 \mathbb{T} への写像

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, \quad x \mapsto \exp(2\pi i x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$$

に準同型定理を適用して, \mathbb{R}/\mathbb{Z} と \mathbb{T} が同型であることを導け.

- (2) 直積 $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ に属する位数 4 の元をすべて求めよ.
- (3) \mathbb{R} は $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ と同型でないことを証明せよ.