ピタゴラス数が作る
円周上の有理点

2021 年 1 月 9 日

中野 伸 （学習院大学理学部数学科）
shin.nakano@gakushuin.ac.jp

§1　ピタゴラス数

三平方の定理（ピタゴラスの定理ともいう）から始めよう．

定理 1.1　直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さを x, y とし，斜辺の長さを z とすると

$$x^2 + y^2 = z^2$$

が成り立つ．

ここでは x, y, z が自然数であるものを考えよう． つまり

$$\boxed{\text{各辺が自然数の長さをもつ直角三角形}}$$

を探るわけである．

定義 1.2　関係式

$$a^2 + b^2 = c^2$$

をみたす自然数 a, b, c の組 (a, b, c) をピタゴラス数という． さらに a, b, c の最大公約数が 1 であるとき，(a, b, c) を**原始的ピタゴラス数**という．

古代からいくつかのピタゴラス数が知られている;

$$(3, 4, 5),\ (5, 12, 13),\ (7, 24, 25),\ (8, 15, 17),\ \text{など}\ldots$$

どんなピタゴラス数も原始的ピタゴラス数の何倍かで表されるから，すべての原始的ピタゴラス数を作り出す方法があれば，すべてのピタゴラス数が得られることになる．

今後の話をスムーズにするために，ピタゴラス数 (a, b, c) の “数の範囲” を自然数だけでなく負の整数まで含めて考えることにする． ただし c だけは正とする． つまり，$a^2 + b^2 = c^2$ をみたす整数 a, b と自然数 c の組 (a, b, c) を**ピタゴラス数**として再定義する． たとえば，

$$(-3, 4, 5),\ (5, -12, 13),\ (-7, -24, 25),\ \ldots$$

などもピタゴラス数と考えるわけである．

§2　円周上の有理点

ピタゴラス数を求めることは，

$$X^2 + Y^2 = 1$$

の有理数解 X, Y を求めることと “同等” であることに注意する．実際，ピタゴラス数 (a, b, c) がみたす式 $a^2 + b^2 = c^2$ から，$X = a/c,\ Y = b/c$ が $X^2 + Y^2 = 1$ の有理数解であることがわかり，逆に，$X^2 + Y^2 = 1$ の有理数解 X, Y を通分して $X = a/c,\ Y = b/c$ と表わせば，ピタゴラス数 (a, b, c) が得られるからである（くどい？）．ここで a/c や b/c が既約分数の場合，得られるピタゴラス数 (a, b, c) は原始的となる．このようにして，原始的ピタゴラス数は，原点を中心とする半径 1 の円周 S の上にある有理数を座標にもつ点（これを**有理点**という）と対応付けられることになる．

$$\begin{array}{ccc} \text{原始的ピタゴラス数} & \Longleftrightarrow & \text{単位円上の有理点} \\ (a, b, c) & \longleftrightarrow & \left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right) \end{array}$$

一方で，単位円は絶対値 1 の複素数全体の集合と同一視することができる．

$$\begin{array}{ccc} \text{単位円上の点} & \Longleftrightarrow & \text{絶対値 1 の複素数} \\ (X, Y) & \longleftrightarrow & X + iY \end{array}$$

そこで,「絶対値 1 の複素数全体の集合」も単位円と呼び S で表すことにしよう;

$$S = \{\ z \mid z \text{ は } |z| = 1 \text{ をみたす複素数}\ \}$$

さらに，$z \in S$ は，実部も虚部も有理数であるとき，S 上の**有理点**と呼ぶことにする．そうすると，上の対応を合わせて

$$\begin{array}{ccc} \text{原始的ピタゴラス数} & \Longleftrightarrow & S \text{ 上の有理点} \\ (a, b, c) & \longleftrightarrow & \dfrac{a + bi}{c} \end{array}$$

という対応関係が得られる．

ところで，複素数には四則演算 (和差積商) が定義されていて，とくに S は積について閉じていることに注意しよう．つまり，複素数 α, β について $|\alpha| = |\beta| = 1$ ならば，$|\alpha\beta| = 1$ が成り立っている（当たり前のようだが…）．そこで，ふたつのピタゴラス数から，それぞれに対応する S の元（＝要素，つまり絶対値 1 の複素数）をとり，それらの積から新たなピタゴラス数を構成できる可能性がある．

$$\begin{array}{ccccc} \text{ふたつのピタゴラス数} & \rightarrow & \text{複素数の積} & \rightarrow & \text{新しいピタゴラス数} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} (a_1, b_1, c_1) & \longrightarrow & z_1 \\ (a_2, b_2, c_2) & \longrightarrow & z_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{積}} z_1 z_2 \longrightarrow (d, e, f)$$

たとえば，$(3,4,5)$，$(5,12,13)$ に対応する S の元をとって，それらの積

$$\frac{3+4i}{5}\cdot\frac{5+12i}{13}=\frac{-33+56i}{65}$$

を経由して，新しいピタゴラス数 $(-33,56,65)$ が得られる．この例のように，積をとった結果，第一象限におさまらないかもしれないので，負の整数も考えに入れることで，ピタゴラス数の概念を少しだけ拡張しておいたってわけ．ただし，$a=0$ または $b=0$ となるもの，$(0,\pm c,c),(\pm c,0,c)$ は特別なものとして**自明なピタゴラス数**と呼ぶことにし，以下では，ピタゴラス数と言えば非自明なピタゴラス数をさすこととする．

§3　1のべき根

自然数 n について，$z^n=1$ をみたす複素数 z を **1の n 乗根**とよぶ．また，これらを総称して **1のべき根**といい，その全体を W で表す．

$$W=\{\ z\mid z\ \text{は複素数で，ある自然数}\ n\ \text{について}\ z^n=1\ \text{をみたす}\ \}$$

1のべき根は，絶対値が1であることがすぐわかるから，S に属する;

$$W\subset S$$

次の定理は，ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\qquad(n\ \text{は整数})$$

を用いて証明することができる．証明は皆さんの “お楽しみ” として残しておこう．

定理 3.1　z を絶対値1の複素数，すなわち $z\in S$ とする．このとき，z が1のべき根であるためには，z の偏角が π の有理数倍ラジアンであることが必要十分である．

たとえば，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は1の3乗根であり，その偏角は $\dfrac{2\pi}{3}$ である．

偏角が π の有理数倍でない複素数を思い浮かべるのは，なかなか難しいかもしれない．だって，高校の教科書には，$\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{6},\ldots$ あたりしか出てこなかったもんね．逆に言えば，1のべき根でない円周上の複素数は，とても扱いにくい「ヘンな奴」という感じがする．そいつらは,「不自然で馴染みがない」複素数に違いない，うん，きっとそうだ……．ところが，違うんだなこれが！

§4　ピタゴラス数ってヘンな奴？

これから考えたいのは，W と S のギャップについてである．つまり，W と S との違いは何か？

$$W \subset S$$

なので，さらに詳しく，W に属さないような S の元で,「自然な」または「馴染みのある」複素数を見てみたい……，なんてことを考える．

そこで，始めに戻ってピタゴラス数に着目する．

ピタゴラス数 (a,b,c) に対して，複素数 $z = \dfrac{a+bi}{c}$ を考えてみよう．必要なら a,b,c の最大公約数で割っておいて，a,b,c の最大公約数は 1，つまり (a,b,c) は原始的であると仮定する．さて，$|z| = 1$ すなわち $z \in S$ であるが，問題はこれが W に属するかということである．$z \in W$ ならば $z^n = 1$ をみたす自然数があることになる．分数のまま扱うのはイヤなので，

$$cz = a + bi$$

の累乗 $(cz)^n$ を考える．実部，虚部に分けて

$$(cz)^n = x_n + y_n i \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって，整数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を定める．このとき，

$$(cz)^n = (a+bi)(cz)^{n-1} = (a+bi)(x_{n-1}+y_{n-1}i) = (ax_{n-1}-by_{n-1})+(bx_{n-1}+ay_{n-1})i$$

だから，ふたつの漸化式

$$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} - by_{n-1} \\ y_n = bx_{n-1} + ay_{n-1} \end{cases}$$

が得られる．なんだか複雑そうなので，とりあえず $n = 1, 2, 3, 4$ について計算してみよう…

$$\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a^2 - b^2 \\ y_2 = 2ab \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = a^3 - 3ab^2 \\ y_3 = 3a^2b - b^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = \text{複雑すぎ…} \\ y_4 = \text{もうやだ…} \end{cases}$$

なんだかなあ，よくわからないなあ……．

こういうときは，

コーヒーを一杯…

ちょっと頭を休ませましょう．

ええっと，上の計算ではピタゴラス数の関係式

$$a^2+b^2=c^2$$

をぜんぜん使ってないなぁ…．そこで，b^2 が現れたら c^2-a^2 に置き換えて計算し直してみると，

$$\begin{cases} x_2=2a^2-c^2 \\ y_2=2ab \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=4a^3-3ac^2 \\ y_3=4a^2b-bc^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=8a^4+(c^2\text{ の倍数}) \\ y_4=8a^3b+(c^2\text{ の倍数}) \end{cases}$$

これらの式をじっと眺めると，一般に次のことが予想される;

予想　すべての自然数 n に対して，

$$x_n=2^{n-1}a^n+(c^2\text{ の倍数}), \quad y_n=2^{n-1}a^{n-1}b+(c^2\text{ の倍数})$$

と表される．

この予想は，数学的帰納法を用いて証明できる．これも皆さんの “お楽しみ” として証明は書かないでおこう．

さて，(a,b,c) は原始的ピタゴラス数としてよかったので，ab と c は互いに素，さらに c は奇数なので，結局 $2ab$ と c は互いに素になる．このことから，y_n は決して 0 にならないことがわかる．y_n は $(cz)^n$ の虚部だから，$(cz)^n$ は実数ではない．とくに $z^n\neq 1$ である．よって，次の定理が証明できた;

定理 4.1　ピタゴラス数 (a,b,c) に対して

$$z=\frac{a+bi}{c}$$

と定めると，z は S には属するが，W には属さない．すなわち，z は 1 のべき根ではなく，偏角は π の有理数倍ではない．

この定理は，ピタゴラス数という，ある意味「身近で馴染みのある数」から自然に定義される複素数が，1 のべき根という受け入れやすい数ではない「ヘンな奴」であることを示している．これは不思議なことなのだろうか？　それとも，不思議と思うオレが「ヘンな奴」なのだろうか？

いずれにしても，こんなこと考えてる奴いねーよ，ということを考えることは

楽 し い ！

おしまい