位相入門

川崎徹郎

2012 秋

●授業の進め方と単位の出し方

1. 講義と演習、ともに出席をとります。毎回 1 人 1 片ずつ出席ラベルを配ります。学籍番号、名前を書いて所定のところにはってください。

2. 質問を歓迎します。出席ラベルの余白に質問または感想を書いてください。次回までに答えたいと思います。答をまとめて、位相入門通信として配ります。

3. ラベルをはると、出席点 1 点を出します。20 点を満点とします。

4. 問題を解いた人には、1 題 5 点を出します。20 点を満点にします。

5. 以上の合計点から 10 点を引いたものを持ち点 x とします。

6. 講義、演習の 2 回の試験の合計点にある変換をします。その方法は、0 点は 0 点、最高点はだいたい 100 点、平均点をだいたい 50 点とするものです。その結果得られた点数を y とします。

7. 成績表につく点 z は次式で与えます。

$$z = x + \frac{(100 - x)}{100} \times y = x + y - \frac{xy}{100}$$

8. 教室では、飲み物はかまいませんが、食事はしないでください。

1 集合と写像（復習）

微分積分学と集合論で用いられる標準的な述語と記号を用いることにする。

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \text{実数全体の集合} \\ \mathbb{Q} &= \text{有理数全体の集合} \\ \mathbb{Z} &= \text{整数全体の集合} \\ \mathbb{N} &= \text{正の整数全体の集合} \end{aligned}$$

1.1 条件により定まる集合

A を集合とするとき、$x \in A$ は x が A の元であることを表す。x が A の元でないときは $x \notin A$ とかく。S を集合とする。そのとき

$$\{x \mid x \in S \text{ かつ“}\ldots\text{”}\}$$

は S の元で条件 “...” を満たすもの全体のつくる集合を表す。たとえばふたつの集合 A と B の**合併集合**は

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と表され、A と B の**共通部分**は集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

である。$x \in A$ と $x \in B$ が同時に起こらないとき、A と B は交わらないといい

$$A \cap B = \emptyset$$

と表される。ただし、ここで $\emptyset$ は空集合を表す。

条件 P と Q について

$$P \Rightarrow Q$$

は P ならば Q、すなわち P が成り立つとき Q が成り立つことを意味する。もしも $P \Rightarrow Q$ でさらに $Q \Rightarrow P$ も成り立つとき、P と Q は**同値**であるといい

$$P \iff Q$$

とかく。

A と B を集合とする。すべての x に対して、$x \in A \Rightarrow x \in B$ が成り立つとき、A は B の**部分集合**であるといい、$A \subset B$ と書く。(したがって、$A \subset A$ はすべての A について成り立つ。その意味で、$\subset$ は $<$ でなく $\leqq$ に似ている。) $A \subset B$ のことを $B \supset A$ とも表す。

集合 A と B の**差集合**とは集合

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

のことである。ここでは必ずしも $B \subset A$ とは仮定しない。したがって、すべての集合 A, B に対し $A - B$ が定義される。

記号 $\{a\}$ はただひとつの元 a からなる 1 元集合を表す。$a, b, c, \ldots$ を元とする集合は $\{a, b, c, \ldots\}$ とかかれる。この表し方は、$a, b, c, \ldots$ を特定しにくいので、十分に正確といえないこともある。より正確に表すには次のような方法もある。

n 個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ からなる集合を $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ と表す。このとき、$a_i = a_j$ であることも許す。すなわち、厳密には n 個より小さい集合を表すこともある。

無限個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ からなる集合を $\{a_1, a_2, \ldots\}$ または $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ と表す。記号 "$\ldots$" の使い方に注意してほしい。後に詳しく論ずることであるが、無限集合がつねにこのように表されるとは限らない。また、$a_1, a_2, \ldots$ のなかに同じものがたくさんあるときには $\{a_1, a_2, \ldots\}$ は有限集合になることもありうる。

1.2 積集合、有限列

a を第 1 項、b を第 2 項とする**順序対**を (a, b) で表す。すなわち、$(a, b) = (c, d)$ となるのは、$a = c$ かつ $b = d$ のときで、そのときに限るものとする。集合 A, B に対して、**積集合** $A \times B$ とは $a \in A$ かつ $b \in B$ であるようなすべての順序対 (a, b) 全体のつくる集合のことである。$A \times A$ のかわりに A^2 とかいてもよい。さらに正の整数 n に対して

$$\begin{aligned} A^n &= A \times A \times \cdots \times A \quad (n \text{ 個の積}) \\ &= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

と表す。

A^n の元 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は A の元からなる長さ n の**有限列**という。同じ元からなる集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ とは異なることに注意せよ。たとえば

$$\begin{aligned} (1,2,3,4,5) \neq (2,4,1,3,5) &\qquad \text{だが} \qquad \{1,2,3,4,5\} = \{2,4,1,3,5\} \\ (1,2,1,2,1) \neq (1,2) &\qquad \text{だが} \qquad \{1,2,1,2,1\} = \{1,2\} \end{aligned}$$

1.3 写像

集合 A から B への**写像**

$$f : A \to B$$

とは次の 3 つのもの A, B, f で与えられるものである。すなわち、A, B は集合で、A の任意の元 a に対し、B の元 $f(a)$ がちょうどひとつだけ定まっているものとする。 写像 $f : A \to B$ が与えられているとは、単に A から B への矢印があるということでなく、A の元 a に対し B の元 $f(a)$ が既に決められているという状態である。また、写像 $f : A \to B$ を定めるということは、A のすべての元 a に対し B の元 $f(a)$ を定める方法を決めるということである。

このとき A を写像 f の**定義域**、B を写像 f の**値域**とよぶ。また、元 $b = f(a)$ を元 a の写像 f による**像**という。

より一般に、部分集合 $A' \subset A$ に対して、A' の像を集合

$$f(A') = \{b \mid \text{ある } a \in A' \text{に対して } b = f(a)\}$$

であると定義する。$f(A')$ は B の部分集合である。

単に、写像 f の**像**とは、$A' = A$ のときの像

$$f(A) = \{b \mid \text{ある } a \in A \text{ に対して } b = f(a)\}$$

のことをいう。

$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ が成り立つとき、f は**単射**である、または、$1:1$ であるという。

$$\text{“}f \text{ は単射”} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“}a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')\text{”}$$

$f(A)$ が B 全体になっているとき、f は**全射**である、または、上への (onto) 写像であるという。

$$\text{“}f \text{ は全射”} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“}f(A) = B\text{”}$$

f が同時に単射でありかつ全射であるとき、f は**全単射**であるという。

$f : A \to B$ が全単射であるとき

$$f : A \sim B$$

とかく。このとき、f の**逆写像** $f^{-1} : B \to A$ を $f(a) \in B$ に $a \in A$ を対応させるものとして定めることができる。f^{-1} も全単射である。すべての $a \in A$ に対して $f^{-1}(f(a)) = a$ が成り立ち、すべての $b \in B$ に対して $f(f^{-1}(b)) = b$ が成り立つ。

$$\text{“}a = f^{-1}(b)\text{”} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“}b = f(a)\text{”}$$

写像 f に逆写像が存在しないときでも、各元 $b \in B$ に対して b の**逆像** $f^{-1}(b)$ を次のように定義することができる。

$$f^{-1}(b) = \{a \mid a \in A \text{ かつ } f(a) = b\}$$

ここで $f^{-1}(b)$ は A の元ではなく、A の部分集合であることに注意してほしい。$b \notin f(A)$ のときには $f^{-1}(b) = \emptyset$ である。より一般に $B' \subset B$ に対して

$$f^{-1}(B') = \{a \mid a \in A \text{ かつ } f(a) \in B'\}$$

とおき、これも逆像という。

$f : A \to B$ を写像とし、A' を A の部分集合とする。そのとき写像 $g : A' \to B$ がつぎの条件で定まる。すなわち、すべての $a \in A'$ に対し $g(a) = f(a)$ が成り立つものとする。この写像 g を写像 f の集合 A への**制限**とよび、記号 $f|A'$ で表す。

部分集合 $A' \subset A$ に対し、A' から A への写像 $\iota : A' \to A$ を $\iota(a) = a$ により定める。**包含写像**という。すると $f|A' = f \circ \iota$ が成り立つ。

$$\iota : A' \subset A$$

特に、$A' = A$ のときの包含写像は**恒等写像**と呼ばれ、全単射である。記号 1 または 1_A が用いられる。これらの写像は形式的議論をするとき便利である。

$$1 : A = A$$

1.4 列、集合の列

A を集合とするとき、A の元の**列** (無限列) とは A の元を成分とする列

$$a_1, a_2, \ldots$$

である。すなわち、各 $i \in \mathbb{N}$ に対し、A の元 a_i が定まっていることで、いいかえると、i に対して a_i を対応させる写像が与えられていることである。通常、カッコにはさんで $(a_1, a_2, \ldots)$ または $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ のようにかく。

$$(a_i)_{i=1,2,\ldots} \quad \text{または、単に} \quad (a_i)$$

と表すこともある。有限列の場合と同様に、元の列は写像の像

$$\{a_1, a_2, \ldots\} = \{a \mid \text{ある } i \in \mathbb{N} \text{ に対して } a = a_i\}$$

とは異なる。列を考えるときは、何が含まれているかだけでなく、何が何番目に含まれているかが重要である。

$M_1, M_2, \ldots$ を**集合の列**とする。すなわち、各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、集合 M_i が定まっているものとする。そのときすべての M_i の**共通部分**が

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \{m \mid \text{すべての } i \text{ に対して } m \in M_i\}$$

によって定義される。同様に、すべての M_i の**合併集合**は

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \{m \mid \text{ある } i \text{ に対して } m \in M_i\}$$

により定義される。 $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ の代わりに

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n \quad \text{または、単に} \quad \bigcap_{n} M_n$$

もよく用いられる。これに似た記号は有限個の集合の列の共通部分、合併集合に対しても使われる。

例題 (i) I_n を開区間 $\left(-1+\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right)$ とする。ただし、$I_1 = \emptyset$ である。このとき $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ を求めよ。

(ii) J_n を閉区間 $\left[-1+\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ とする。ただし、$J_1 = \{0\}$ である。このとき $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ を求めよ。

(iii) このように、閉区間の合併が開区間になることがあるが、開区間の合併が閉区間なることはないことを示せ。

解答 (i) すべての n に対し $I_n \subset (-1,1)$ である。したがって $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset (-1,1)$ である。

逆に $t \in (-1,1)$ とすると $t+1 > 0$ かつ $1-t > 0$ である。したがって、十分大きい n に対し $t+1 > \dfrac{1}{n}$ かつ $1-t > \dfrac{1}{n}$ となる。よって $-1+\dfrac{1}{n} < t < 1-\dfrac{1}{n}$ が成り立つ。すなわち $t \in I_n$ である。
以上より $t \in (-1,1)$ とすると、十分大きい n に対し $t \in I_n$ であることがわかった。したがって $(-1,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ である。

あわせれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (-1,1)$ が示された。

(ii) (i) において I_n を J_n で置きかえれば、すべて成り立つ。

(iii) $I_n = (a_n, b_n)$ を開区間とし、$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ が閉区間 $[c,d]$ であると仮定して矛盾を導く。仮定より $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ が成り立つ。したがって、ある n に対し

$c \in I_n$ である。$I_n = (a_n, b_n)$ より $a_n < c$ がわかる。ゆえに、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $c - a_n > \varepsilon > 0$ が成り立つ。よって $a_n < c - \varepsilon < c < b_n$ である。すなわち

$$c - \varepsilon \in I_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [c, d]$$

であるが、これは矛盾である。■

このように、集合の議論では無限個のものの合併や共通部分が、極限の操作を経ずに、いっぺんに定まる。無限個の集合の合併や共通部分を、有限個の集合の合併や共通部分の極限として扱うことは無理があり、正しくない結論を導くことがある。

1.5 集合族

集合として、その元がすべて集合であるものを考えることがある。そのようなものを、特に**集合族**とよぶ。$\mathcal{G}$ を集合族とする。$\mathcal{G}$ はある範囲の集合の集まりである。すべての集合の集まりというものを集合として扱ってはいけない。それはもはや集合でないことが知られている。

$G \in \mathcal{G}$ とすると G は集合であるから、$\mathcal{G}$ の元の列は集合の列にほかならない。集合の列とは特定の集合 $\mathbb{N}$ の各元 n に対し、$\mathcal{G}$ の元 G_n を対応させるものである。より一般に、ある集合 A の各元 α に対し、ある集合族 $\mathcal{G}$ の元 G_α を対応させることを考えよう。このようなものを A を添え字集合とする集合族といい

$$(G_\alpha)_{\alpha \in A} \quad \text{または} \quad (G_\alpha)$$

と表す。このような集合族に対してもそれらの共通部分、合併集合が定義できる。

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha &= \{x \mid \text{すべての } \alpha \in A \text{ に対して } x \in G_\alpha\} \\ \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha &= \{x \mid \text{ある } \alpha \in A \text{ に対して } x \in G_\alpha\} \end{aligned}$$

特に、$A = \mathbb{N}$ か $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ のときは、まえに述べた集合の列の共通部分、合併集合になっている。さらに、任意の集合族 $\mathcal{G}$ に対し、それに属するすべての集合の共通部分や合併集合を考えることもできる。それらは

$$\begin{aligned} \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G &= \{x \mid \text{すべての } G \in \mathcal{G} \text{ に対して } x \in G\} \\ \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G &= \{x \mid \text{ある } G \in \mathcal{G} \text{ に対して } x \in G\} \end{aligned}$$

である。最後にかかれている、$\mathcal{G}$ に属するすべての集合の合併集合を $\mathcal{G}^*$ とかくこともある。

$$\mathcal{G}^* = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$$

一般に、集合 X に対して、X の部分集合全体のつくる集合族が考えられる。それは X だけから定まるもので、特に、記号 $\mathcal{P}(X)$ で表し、集合 X の**ベキ (冪) 集合**という。

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$$

すなわち、A が $\mathcal{P}(X)$ の元であるとは、A が X の部分集合であることである。

$$A \in \mathcal{P}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset X$$

また、つねに $\emptyset \in \mathcal{P}(X), \quad X \in \mathcal{P}(X)$ が成り立つ。このとき、X の元 x とひとつの元 x だけからなる部分集合 $\{x\}$ とを混同してはならない。$x \in \{x\}$ だが、けっして $x = \{x\}$ ではない。実際、いかなる集合、またはその元に対しても、$A \in A$ は成り立ってはならないことが知られている。また、$x \in X$ ならば、$\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ であるが、$x \in \mathcal{P}(X)$ は成り立たないことが多い。

集合族と同様に、写像族も考えることがある。A の各元 α に対し、写像 f_α が定まっている状態である。f_α の定義域 X_α、値域 Y_α は α により動くこともあるし、α に依らず、一定の X, Y であることもある。

$$(f_\alpha)_{\alpha \in A} \quad \text{または} \quad (f_\alpha)$$

集合 A から集合 B への写像全体は集合をつくり、B^A と表す。B^A も写像族の 1 つと考えることができる。

$$B^A = \{f : A \to B\} = (f)_{f \in B^A}$$

例　$2 = \{0, 1\}$ とおくとき、$\mathcal{P}(X)$ と 2^X には自然な対応がある。

証明　$A \in \mathcal{P}(X)$ に対して、$f \in 2^X$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

と定めればよい。■

例題　集合の列 $M_1, M_2, \ldots$ について、次式が成り立つことを示せ。

$$\bigcup_{1 \leqq i < j < \infty} (M_i \cap M_j) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j \neq i} M_j \right)$$

証明　左辺の集合を A、右辺の集合を B とおき、$A \subset B,\ B \subset A$ を示す。

"$A \subset B$"　左辺は、ある組み合わせに対して、ふたつの M_i, M_j に含まれる元 x の集まりである。そこで $x \in M_{i_0} \cap M_{j_0}$ とする。今、$i \neq i_0$ ならば、$j = i_0$ は $j \neq i$ をみたし、$x \in M_j$ である。すなわち

$$x \in M_{i_0} \subset \bigcup_{j \neq i} M_j$$

また、$i = i_0$ ならば、$j = j_0$ に対し、$j \neq i$ で $x \in M_j$ である。ゆえに

$$x \in M_{j_0} \subset \bigcup_{j \neq i} M_j$$

したがって、すべての i に対し

$$x \in \bigcup_{j \neq i} M_j$$

これは、$x \in B$ を示している。

"$B \subset A$"　$x \in B$ を仮定し $x \in A$ を示す。すべての i に対し $x \notin M_i$ ならば $x \notin B$ は明らかである。したがって、ある i_0 に対し $x \in M_{i_0}$ である。すると、$x \in B$ だったから、この $i = i_0$ に対しても

$$x \in \bigcup_{j \neq i} M_j$$

でなければならない。すなわち、ある $j = j_0$ $(j_0 \neq i_0)$ に対して、$x \in M_{j_0}$ である。したがって、とくに、$x \in M_{i_0} \cap M_{j_0}$ で、これは、$x \in A$ を示している。

問題

1.1　(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.2　(i) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$

(ii) $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$

1.3 $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

1.4 $A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B$

1.5 $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C \quad \Rightarrow \quad A = B = C$

1.6 $A \subset B$ であるための必要十分条件は、すべての C に対して

$$A \cup (B \cap C) = B \cap (A \cup C)$$

1.7 集合 A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 に対して、次の (　　) に入る集合は何か。また、得られた式を証明せよ。

$$(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (\quad) \cap (\quad) \cap (\quad) \cap (\quad) \cap (\quad) \cap (\quad)$$

1.8 集合 B, C に対して

$$a \in B \cup C \quad \Rightarrow \quad a \in B \text{ または } a \in C$$

は自明であるが

$$A \subset B \cup C \quad \Rightarrow \quad A \subset B \text{ または } A \subset C$$

は成り立たないことがある。説明せよ。

1.9 (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

1.10 $f : X \to Y$ を写像とするとき

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

後式について、等号が成り立たないのはどのような場合か。

1.11 (i) $f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$

(ii) $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$

後式について、等号が成り立たないのはどのような場合か。

1.12 (i) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(ii) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

1.13 (i) $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(C_\lambda)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(C_\lambda)$

1.14 (i) $A \subset f^{-1}(f(A))$

(ii) $f(f^{-1}(C)) \subset C$
それぞれに対して、等号が成り立たないのはどのような場合か。

1.15 (i) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$

(ii) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)$

1.16 (i) $X - \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda)$

(ii) $X - \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda)$

1.17 (i) $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ とするとき、$\bigcap_n I_n$ を求めよ。

(ii) $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right\}$ とするとき、$\bigcap_n D_n$ を求めよ。

1.18 (i) $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ とするとき、$\bigcap_n I_n$ を求めよ。

(ii) $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right\}$ とするとき、$\bigcap_n D_n$ を求めよ。

1.19 (i) $I_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ とするとき、$\bigcap_n I_n$ を求めよ。

(ii) $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - 1 - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right\}$ とするとき、$\bigcap_n D_n$ を求めよ。

1.20 (i) $I_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\sin n\right)$ とするとき、$\bigcap_n \left(\bigcup_{m>n} I_m\right)$ を求めよ。

(ii) 同じく、$\bigcup_n \left(\bigcap_{m>n} I_m\right)$ を求めよ。

1.21 T_0 を $\mathbb{R}^2$ の $\triangle$ABC の内部とし、T_1 を T_0 の 3 辺の中点を頂点とする三角形の内部とする。以下、同様に、T_i を T_{i-1} の 3 辺の中点を頂点とする三角形の内部とする。そのとき、$\bigcap_n T_n$ を求めよ。

1.22 集合の列 $M_1, M_2, \ldots$ について

$$\bigcap_{1 \leqq i < j < \infty} (M_i \cup M_j) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j \neq i} M_j \right)$$

1.23 下式の右辺、左辺およびその差の集合はどのような集合か、説明せよ。

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=i}^{\infty} M_j \right) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=i}^{\infty} M_j \right)$$

1.24 $X = \{0\}$ とするとき、$\mathcal{P}(X \cup \mathcal{P}(X))$ の元をすべて書け。

1.25 $X = \{0, 1\}$ に対して、$Y = X \cup \mathcal{P}(X)$ とおくとき、$Y \cap \mathcal{P}(Y)$ を求めよ。

1.26 (i) $f : A \to B$ が全単射でないとき、逆写像 $f^{-1} : B \to A$ は存在しない。その事情を説明せよ。

(ii) 一般の $f : A \to B$ に対して、$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ であることを説明せよ。

1.27 写像 $f : X \to Y$ が全射である必要十分条件は、写像 $g : Y \to X$ で $f \circ g$ が恒等写像になるものが存在すること。

1.28 $f : X \to Y$ が単射である必要十分条件は、写像 $g : Y \to X$ で $g \circ f$ が恒等写像になるものが存在すること。

1.29 集合 X, Y, P と写像 $p : P \to X,\ q : P \to Y$ が次の性質を満たしているとする。すなわち、任意の集合 A と写像 $f : A \to X,\ g : A \to Y$ に対して、写像 $h : A \to P$ で $p \circ h = f$ かつ $q \circ h = g$ となるものがちょうどひとつだけ存在するものとする。そのとき、P と $X \times Y$ のあいだには全単射が存在することを示せ。

2　距離空間

数直線 $\mathbb{R}$ の各元 x, y に対して

$$d(x,y) = |x - y|$$

とおく。d は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数であると考えられる。

定理　関数 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は次の性質を持つ。

(D_1) $d(x,y) \geqq 0$

(D_2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(D_3) $d(x,y) = d(y,x)$

(D_4) $d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$　(三角不等式)

証明　明らかである。■

E を Euclid(ユークリッド) 平面とする。E 上に距離の単位をひとつ定めて、固定する。すると、2 点 x, y の間の距離 $d(x,y)$ はつねに実数で表される。

次の定理を初等幾何の議論を用いて証明せよ。

定理 2.1 関数 $d : E \times E \to \mathbb{R}$ は次の性質を持つ。

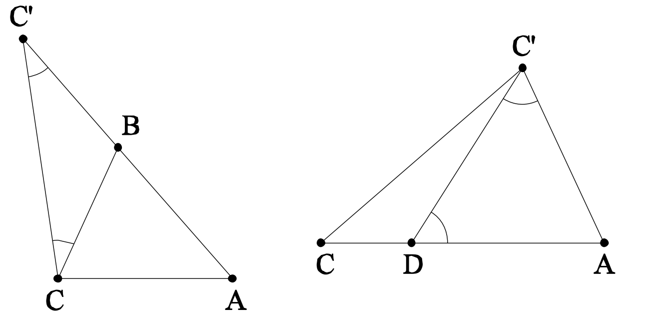
(D_1) $d(x,y) \geqq 0$

(D_2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(D_3) $d(x,y) = d(y,x)$

(D_4) $d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$

証明　$(\mathrm{D}_1) \sim (\mathrm{D}_3)$ は明らかである。(D_4) を示そう。3 点を $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ として、$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) + d(\mathrm{B},\mathrm{C}) \geqq d(\mathrm{A},\mathrm{C})$ すなわち $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC}$ を見る。1 直線上にあるときは明らか（前定理）であるから、$\triangle\mathrm{ABC}$ において、$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} > \mathrm{AC}$ を示せばよい。そのためには、AB の延長上に C' をとり、$\mathrm{BC}' = \mathrm{BC}$ として、$\mathrm{AC}' > \mathrm{AC}$ を見ればよい。そのためには、$\triangle\mathrm{AC}'\mathrm{C}$ において $\angle\mathrm{ACC}' > \angle\mathrm{AC}'\mathrm{C}$ であればよいが、$\angle\mathrm{ACC}' > \angle\mathrm{BCC}' = \angle\mathrm{BC}'\mathrm{C} = \angle\mathrm{AC}'\mathrm{C}$ である。したがって、$\mathrm{AC}' = \mathrm{AC}$ でない。ここで、$\mathrm{AC}' < \mathrm{AC}$ とすると、AC 上に D をとり、$\mathrm{AD} = \mathrm{AC}'$ とできる。このとき、$\angle\mathrm{ACC}' < \angle\mathrm{ADC}' = \angle\mathrm{AC}'\mathrm{D} < \angle\mathrm{AC}'\mathrm{C}$ である。これは矛盾。よって $\mathrm{AC}' > \mathrm{AC}$ である。■



定義　集合 X に対し、d を関数 $X \times X \to \mathbb{R}$ で条件 $(\mathrm{D}_1) \sim (\mathrm{D}_4)$ を満たすものとする。そのとき、d を X 上の**距離関数**といい、対 $[X, d]$ を**距離空間**という。

集合 X 上の距離関数がすでにきまっている場合には、距離空間 X ということもある。これは、厳密には、正しい表現ではない。d と d' が同じ集合 X 上の異なる距離関数のとき、距離空間 $[X, d]$ と距離空間 $[X, d']$ は異なる距離空間であるからである。

正の整数 n に対し、n 個の実数を成分とするベクトル $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 全体の集合を $\mathbb{R}^n$ で表す。2 点

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

の距離を次のように定める。

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

定理 2.2 $[\mathbb{R}^n, d]$ は距離空間である。

証明　$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の定め方より、$(\mathrm{D}_1) \sim (\mathrm{D}_3)$ は明らかである。(D_4) を示そう。$\mathbb{R}^n$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

で定めると $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ であるから、示すべき式は $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \geqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|$ と表される。さらに $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ とおけば、この式は $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ と表される。この式を示せばよい。両辺を 2 乗して、内積で表せば

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

左辺を展開すると $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ となり、同じものを消せば、上式は

$$2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqq 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

と表される。これはシュワルツの不等式

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

から従う。

シュワルツの不等式を証明するには、両辺を 2 乗して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 \leqq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$$

を示せばよいが、これは、常に $\geqq 0$ の 2 次式

$$t^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = (t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \geqq 0$$

の判別式 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \leqq 0$ である。■

$\mathbb{R}^n$ 上の、上の式で定義された距離関数を Euclid **距離関数**と呼び、距離空間 $[\mathbb{R}^n, d]$ を n **次元** Euclid **空間**と呼ぶ。

定義 V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする。V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ に対し、実数 $\|\boldsymbol{v}\|$ が定まって、次の性質を満たすとき、$\|\boldsymbol{v}\|$ を $\boldsymbol{v}$ の**ノルム**という。

(N_1) $\|\boldsymbol{v}\| \geqq 0$

(N_2) $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

(N_3) $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{v}\|$

(N_4) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \leqq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$

ノルムの定まった線形空間をノルム空間という。

例 2.3 通常のノルム（ベクトルの長さ）は $\mathbb{R}^n$ のノルムである。Euclid **ノルム**という。

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

定理 2.4 V をノルム空間とする。$d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$ とおけば、$[V,d]$ は距離空間である。

例 2.5 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

はノルムである。

例 2.6 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

はノルムである。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が凸であるとは、A の任意の 2 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を結ぶ線分上の点も A に属するとき。

$$(1-t)\,\boldsymbol{a} + t\,\boldsymbol{b} \in A \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

定理 2.7 $\mathbb{R}^n$ の任意のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ に対して

$$A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$$

は凸集合である。

問 2.8 $n = 2$ のとき、$\|\boldsymbol{x}\|, \|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ に対して、A を描け。

$A \subset \mathbb{R}^n$ と $t > 0$ に対し

$$tA = \{ta \mid a \in A\}$$

と表す。

定理 2.9 $A \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合で、次の (1), (2), (3) を満たすものとする。

(1) $A = -A$

(2) $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon A = \{\mathbf{0}\}$

(3) $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0} \varepsilon A = \mathbb{R}^n$

そのとき

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = \inf\{r > 0 \mid \boldsymbol{x} \in rA\}$$

はノルムである。

例題 F を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体の集合とする。F は関数の和、定数倍に関し、線形空間をなす。F 上の 1 ノルムを

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

と定めるとき、$\|f\|_1$ は F 上のノルムであることを示せ。

証明 $|f(x)|$ は閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数であるから、上の積分はつねに有限の値をとる。$\|f\|_1$ が $(\mathrm{N}_1) \sim (\mathrm{N}_4)$ を満たすことを示せばよい。$(\mathrm{N}_1), (\mathrm{N}_3)$ は明らかである。(N_2) と (N_4) を示す。

“(N_2)” $\|0\|_1 = 0$ は明らかだから、$\|f\|_1 = 0 \ \Rightarrow\ f \equiv 0$ を示せばよい。そのためには、f を $[0,1]$ 上の連続関数で、恒等的には 0 でないものとするとき

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx > 0$$

を示せば十分である。

ある点 x_0 で $f(x_0) \neq 0$ であるから、十分小さい $\delta, \varepsilon > 0$ に対し、区間 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上で $|f(x)| > \delta > 0$ であるとしてよい。すると、$|f(x)| \geqq 0$ より

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \geqq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|\,dx \geqq 2\varepsilon\delta > 0$$

"(N_4)"

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \\ &\leqq \int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)\,dx \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例 2.10 F 上の ∞ ノルムを

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$$

と定めるとき、$\|f\|_\infty$ は F 上のノルムである。

問題

以下の命題は正しいとは限らない。証明するか、反例を示せ。

2.11 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$$

とおくとき、$[\mathbb{R}^n, d_1]$ は距離空間である。

2.12 同じく、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

とおくとき、$[\mathbb{R}^n, d_\infty]$ は距離空間である。

2.13 同じく、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$d_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|} + \cdots + \sqrt{|x_n - y_n|}\right)^2$$

とおくとき、$[\mathbb{R}^n, d_{\frac{1}{2}}]$ は距離空間である。

2.14 $p, q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とする。$a, b \geqq 0$ に対して

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

2.15 同じく、$a_i, b_i \geqq 0$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

2.16 同じく、$a_i, b_i \geqq 0$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2.17 $p \geqq 1$ なるとき、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

とおけば、$[\mathbb{R}^n, d_p]$ は距離空間である。

2.18 $[X, d]$ を距離空間とする。X の点 x, y に対し $d^2(x, y) = (d(x, y))^2$ とおくと、$[X, d^2]$ は距離空間である。

2.19 距離空間 $[X, d]$ に対して、$[X, \sqrt{d}]$ は距離空間である。

2.20 距離空間 $[X, d]$ に対して、$[X, d^{\frac{1}{3}}]$ は距離空間である。

2.21 $p \geqq 1$ とする。距離空間 $[X, d]$ に対して、$[X, d^{\frac{1}{p}}]$ は距離空間である。

2.22 距離空間 $[X, d]$ に対して、$[X, \frac{d}{1+d}]$ は距離空間である。

2.23 距離空間 $[X, d]$ に対して、$[X, \min\{1, d\}]$ は距離空間である。

2.24 X 上の 2 つの距離関数 d_1, d_2 に対して、$[X, \max\{d_1, d_2\}]$ は距離空間である。

2.25 X 上の 2 つの距離関数 d_1, d_2 に対して、$[X, \min\{d_1, d_2\}]$ は距離空間である。

2.26 X 上の 2 つの距離関数 d_1, d_2 に対して、$[X, d_1 + d_2]$ は距離空間である。

2.27 f を区間 $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数とする。一般に、距離空間 $[X, d]$ に対して、$[X, f(d)]$ も距離空間になるためには、f がどのような条件を満たせば十分か。適当な条件をさがし、その条件のもとで $[X, f(d)]$ が距離空間になることを示せ。

2.28 距離関数の条件 $(\mathrm{D}_1) \sim (\mathrm{D}_4)$ のうち、(D_1) は他の 3 つから導かれることを示せ。

2.29 $[X,d]$ を距離空間とするとき、次を示せ。

$$d(x,y)+d(u,v) \leqq d(x,u)+d(x,v)+d(y,u)+d(y,v)$$

2.30 $[X,d]$ を距離空間とする。4 点 u,v,w,x に対して

$$6d(p,u)+2d(p,v)+2d(p,w)+d(p,x)$$

が最小となる点 p は u に一致することを示せ。

2.31 平行四辺形 ABCD において、$\angle$A は鋭角で AB $>$ AD とする。P $\in$ ABCD のうち、最も近い頂点から最も遠いものを求めよ。

2.32 X を日本のすべての民間空港のつくる集合とする。$0 \leqq t < 24$ と X の点 p,q に対し $d'(p,q,t)$ を、時刻 t に p から q に旅行することを思い立ち、定期便の乗継ぎによってもっとも速く行くとき、q に着く時刻を s とするとき、かかる時間 $s-t$ とする。さらに

$$d'(p,q) = \max_{0 \leqq t < 24} d'(p,q,t), \quad d(p,q) = \max\{d'(p,q), d'(q,p)\}$$

とおくとき、$[X,d]$ は距離空間である。d はどのような距離であるか言葉で説明せよ。

2.33 G を閉区間 $[0,1]$ 上の Riemann 積分可能な関数全体の集合とする。G の元 f に対し、$\|f\|_1$ を例題のように定めると、$\|f\|_1$ は F 上のノルムである。

2.34 整数を成分とする数列の全体を X で表すとき、

$$a=(a_1,a_2,a_3,\ldots),\ b=(b_1,b_2,b_3,\ldots) \in X$$

に対して、$d(a,b)$ を

$$d(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\min\{n \mid a_n \neq b_n\}} & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

と定めると、$[X,d]$ は距離空間である。

2.35 p を素数とする。整数 n,m に対して

$$d_p(n,m) = \begin{cases} p^{-k} & m-n = p^k l \ (p \text{ と } l \text{ は互いに素}) \text{ のとき} \\ 0 & n = m \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば、$[\mathbb{Z},d]$ は距離空間である。

2.36 X を長さ n の 0 または 1 からなる有限列の全体とする。すなわち

$$X = \{0,1\}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \text{は 0 または 1}\}$$

とし、X の 2 元 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して、$d(a,b)$ を異なる成分の個数、すなわち $1, 2, \ldots, n$ のうち $a_k \neq b_k$ なる k の個数

$$d(a,b) = \#\{k \mid a_k \neq b_k\} \quad (\#\text{は元の個数を表す。})$$

と定めると、$[X, d]$ は距離空間である。

3　距離空間の開集合、閉集合

$[X, d]$ を距離空間とする。各 $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$N(p, \varepsilon) = \{q \mid q \in X \text{ かつ } d(p, q) < \varepsilon\}$$

とおき、これを（X における）点 p の ε **近傍**と呼ぶ。たとえば、Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ においては $N(p, \varepsilon)$ は円の内部にほかならない。

定義　距離空間 X の部分集合 U が**開集合**であるとは、U の各点 p に対し、十分小さい $\varepsilon > 0$ をとれば、$N(p, \varepsilon) \subset U$ となるとき。

例 3.1　(i) 空集合 $\emptyset$、全体集合 X は開集合である。

(ii) 数直線 $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) は開集合である。

(iii) Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の開円板

$$\mathrm{int}(D^2) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

は開集合である。

定理 3.2 任意の ε 近傍は開集合である。

証明　$q \in N(p, \varepsilon)$ を任意に選ぶとき、ある $\delta > 0$ に対して、$N(q, \delta) \subset N(p, \varepsilon)$ を示せばよい。$d(p, q) < \varepsilon$ である。$\delta = \varepsilon - d(p, q) > 0$ とおく。$r \in N(q, \delta)$ に対して

$$d(p, r) \leqq d(p, q) + d(q, r) < d(p, q) + \delta = d(p, q) + \varepsilon - d(p, q) = \varepsilon$$

したがって、$r \in N(p, \varepsilon)$ となる。すなわち、$N(q, \delta) \subset N(p, \varepsilon)$ である。■

定理 3.3 ふたつの開集合の共通部分は開集合である。

定理 3.4 任意 (無限) 個の開集合の合併集合は開集合である。

証明　$\lambda \in \Lambda$（添字集合）に対して、U_λ を開集合とするとき、合併集合 $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ が開集合であることを示す。$p \in U$ とすると、ある $\lambda \in \Lambda$ に対して $p \in U_\lambda$　U_λ は開集合であるから、ある $\varepsilon > 0$ に対して $N(p, \varepsilon) \subset U_\lambda \subset U$ ■

以上の例、定理より次のことが示された。(証明しなくてよい。)

定理 （開集合族） X の開集合全体のつくる集合族を $\mathcal{O}$ で表す。そのとき、$\mathcal{O}$ は次の性質を満たす。

(O_1) $\emptyset \in \mathcal{O}$

(O_2) $X \in \mathcal{O}$

(O_3) $O_\lambda \in \mathcal{O}(\lambda \in \Lambda) \;\Rightarrow\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

(O_4) $O_i \in \mathcal{O}(i = 1, 2, \ldots, n) \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$

定理 3.5 X の部分集合 U が開集合である必要十分条件は、(無限個の) ε 近傍の合併集合として表されることである。

証明 “ 必要性 ” U の各点 p に対し、ある $\varepsilon_p > 0$ が存在し、$N(p, \varepsilon_p) \subset U$ となる。そのとき

$$U = \bigcup_{p\in U} N(p, \varepsilon_p)$$

なぜなら、任意の $p \in U$ に対して、$p \in N(p, \varepsilon_p)$ であるから、“ 左辺 $\subset$ 右辺 ” である。また、各 $N(p, \varepsilon_p) \subset U$ であるから、“ 右辺 $\subset$ 左辺 ”でもある。

“ 十分性 ” 定理 3.2 と定理 3.4 より従う。■

同じ集合 X 上にふたつの異なった距離関数 d, d' が与えられたとしよう。距離 d, d' はそれぞれ開集合族 $\mathcal{O}(d), \mathcal{O}(d')$ を定める。もちろん、一般には、$\mathcal{O}(d) \neq \mathcal{O}(d')$ だが、たまたま、一致することもある。

定義 X 上の 2 つの距離 d と d' が**同値**であるとは、それらの定める開集合が一致するとき、すなわち、$\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ となるとき。

定理 3.6 集合 X 上の距離関数 d, d' が同値である必要十分条件は、距離 d に関する ε 近傍を $N(p, \varepsilon)$、距離 d' に関する ε 近傍を $N'(p, \varepsilon)$ で表すとき、次の (1),(2) が同時に成り立つことである。

(1) $\forall p \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; N'(p, \delta) \subset N(p, \varepsilon)$

(2) $\forall p \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; N(p, \delta) \subset N'(p, \varepsilon)$

例 3.7 X を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ とし、d を Euclid 距離、d_1 を 1 ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_1$ から定まる距離とすると、d と d_1 は同値である。

例 3.8 同じく、d を Euclid 距離、d_∞ を ∞ ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ から定まる距離とすると、d と d_∞ は同値である。

例題 F を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のつくる集合とし、距離 d_1, d_∞ を、それぞれ、前章の例題、例 **2.10** のノルムから定まる距離とする。そのとき、d_1 と d_∞ は同値でない。

証明 F 上の距離 d_1, d_∞ に関する ε 近傍をそれぞれ $N_1(f,\varepsilon), N_\infty(f,\varepsilon)$ と表す。$f_n \in F$ を

$$f_n(t) = \begin{cases} (n+1)\,t\ ; & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{n+1} \text{のとき} \\ 2-(n+1)\,t\ ; & \dfrac{1}{n+1} \leqq t \leqq \dfrac{2}{n+1} \text{のとき} \\ 0\ ; & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とおけば、$f_n \in N_1\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ だが、$f_n \notin N_\infty(0,1)$ であり、$\varepsilon = 1$ に対して、どのような $\delta > 0$ をとっても、$N_1(0,\delta) \subset N_\infty(0,1)$ とはならない。■

定義 距離空間 X の部分集合 A に対して、その**閉包** $\overline{A}$ を次のように定める。

$$\overline{A} = \{p \in X \mid \forall\varepsilon > 0; N(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

すなわち、点 p のいくらでも近くに A の点が存在するような、点 p の全体が $\overline{A}$ である。$\overline{A}$ のかわりに A^a と表すこともある。

例 3.9 (i) 数直線 $\mathbb{R}$ において、開区間 (a,b) の閉包は閉区間 $[a,b]$ である。$\overline{(a,b)} = [a,b]$

(ii) Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の開円板 $\mathrm{int}(D^2)$ の閉包は閉円板

$$D^2 = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

である。$\overline{\mathrm{int}(D^2)} = D^2$

例 3.10 数直線 $\mathbb{R}$ において、有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の閉包は $\mathbb{R}$ 全体である。$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

証明 距離空間 $t \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して、$N(t,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ を示せばよい。$N(t,\varepsilon) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ である。開区間の幅 2ε に対して、十分大きな $n \in \mathbb{Z}^+$ をとれば $\dfrac{1}{n} < 2\varepsilon$ そのとき、n を分母とする有理数 $\left\{\dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}\right\}$ は間隔 $\dfrac{1}{n}$ で並んでいるから、区間 $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ に少なくとも 1 つは入っている。すなわち、$\dfrac{m_0}{n} \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ となる $m_0 \in \mathbb{Z}$ が存在する。したがって、$N(t,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ である。■

定義 距離空間 $[X,d]$ において、部分集合 A が**稠密**であるとは、$\overline{A} = X$ となるとき。

例 3.11 数直線 $\mathbb{R}$ において、有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の閉包は稠密である。無理数の全体 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ も稠密である。

定理 3.12 $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

証明 $A\subset A\cup B$ より $\overline{A}\subset\overline{(A\cup B)}$ 同様に $\overline{B}\subset\overline{(A\cup B)}$ したがって、$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{(A\cup B)}$ 逆向きの包含関係を示す。$p\in\overline{(A\cup B)}$ とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して、$N(p,\varepsilon)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$ したがって $(N(p,\varepsilon)\cap A)\cup(N(p,\varepsilon)\cap B)\neq\emptyset$ ここで、$p\notin\overline{A}$ とすると、ある $\varepsilon_0>0$ に対して $N(p,\varepsilon_0)\cap A=\emptyset$ すると $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ なる ε に対して $N(p,\varepsilon)\cap A=\emptyset$ 一方、前式より $(N(p,\varepsilon)\cap A)\cup(N(p,\varepsilon)\cap B)\neq\emptyset$ したがって、$N(p,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ すなわち、$0<\varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow N(p,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ が成り立つ。このとき、$\varepsilon_0\leqq\varepsilon$ でも $N(p,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ よって $p\in\overline{B}$ である。すなわち、$\overline{(A\cup B)}-\overline{A}\subset\overline{B}$ が成り立つ。これは $\overline{(A\cup B)}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ と同値である。■

定理 3.13 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

証明 $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$ であるから、逆の包含関係を示せばよい。$p\in\overline{\overline{A}}$ とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して、$N(p,\varepsilon)\cap\overline{A}\neq\emptyset$ である。このとき、$N(p,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ を示せばよい。$N(p,\varepsilon)\cap\overline{A}\neq\emptyset$ より、$q\in N(p,\varepsilon)\cap\overline{A}$ となる q がある。この q に対し $N(p,\varepsilon)$ は開集合であるから、ある $\delta>0$ があり $N(q,\delta)\subset N(p,\varepsilon)$ 一方、$q\in\overline{A}$ より $N(q,\delta)\cap A\neq\emptyset$ よって $N(p,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ ■

定義 X の部分集合 F が**閉集合**であるとは、$\overline{F}=F$ が成り立つときである。

定理 3.14 F が閉集合である必要十分条件は、$X-F$ が開集合であることである。

証明 一般に、$F\subset X$ に対し、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} p\in X-\overline{F} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\varepsilon>0,\ N(p,\varepsilon)\cap F=\emptyset \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\varepsilon>0,\ N(p,\varepsilon)\subset X-F \end{aligned}$$

ここで、F が閉集合であるとすると、$\overline{F}=F$ したがって

$$p\in X-F \quad\Rightarrow\quad \exists\varepsilon>0,\ N(p,\varepsilon)\subset X-F$$

これは、$X-F$ が開集合であることを示している。
逆に、$X-F$ が開集合であるとすると

$$p\in X-F \quad\Rightarrow\quad \exists\varepsilon>0,\ N(p,\varepsilon)\subset X-F \quad\Rightarrow\quad p\in X-\overline{F}$$

したがって、$p\notin F \Rightarrow p\notin\overline{F}$ 対偶をとると $p\in\overline{F}\Rightarrow p\in F$ すなわち、$\overline{F}\subset F$ ここで $F\subset\overline{F}$ は明らかであるから $\overline{F}=F$ が成り立つ。■

定理 3.15 A の閉包は A を含む最小の閉集合である。

定理 3.16 (閉集合族) 閉集合は、次の性質をもつ。

(F_1) $\emptyset$ は閉集合。

(F_2) 全体集合 X は閉集合。

(F_3) 任意 (無限) 個の閉集合の共通部分は閉集合。

(F_4) ふたつの閉集合の合併集合は閉集合。

例 3.17 (i) 数直線 $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ は閉集合である。

(ii) Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の閉円板

$$D^2 = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

は閉集合である。

定理 3.18 X の閉集合 F,G で $F \cap G = \emptyset$ となるものに対して、開集合 U,V をうまく選ぶと $F \subset U,\ G \subset V,\ U \cap V = \emptyset$ とすることができる。

証明 $X-G$ は F を含む開集合である。各 $p \in F$ に対し、$\varepsilon_p > 0$ で $N(p,\varepsilon_p) \subset X-G$ となるものを選ぶ。$U_p = N\left(p, \dfrac{\varepsilon_p}{2}\right)$ とおく。さらに、$U = \bigcup_{p\in F} U_p$ とおくと、U は F を含む開集合である。(示せ。) F,G の役割を入れ替えて、G から同様の操作を行い開集合 V をつくる。$X-F$ は G を含む開集合である。各 $q \in G$ に対し、...

定義 X の部分集合 A に対して、$p \in X$ が A の**集積点**であるとは、$p \in \overline{A-\{p\}}$ となるとき。

すなわち、p の任意の ε 近傍が p 以外の A の点を含む (したがって無限個含む) ときである。A の集積点の全体を A^d で表す。

$$A^d = \left\{p \in X \,\middle|\, p \in \overline{A-\{p\}}\right\}$$

A^d のかわりに A' で表すこともある。

定理 3.19 $\overline{A} = A \cup A^d$

定義 $A - A^d$ の点を A の**孤立点**という。

問 3.20 $p \in A$ は孤立点 $\Longleftrightarrow \exists\varepsilon > 0; N(p,\varepsilon) \cap A = \{p\}$

例 3.21 数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合について

(i) $M = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 1, t$ は有理数 $\}$ とすると

$$M^d = [0,1], \quad (M^d)^d = M^d$$

(ii) $A=\left\{t=\dfrac{1}{n}\;\middle|\; n=1,2,3,\dots\right\}$ とすると、$A^d=\{0\},\ (A^d)^d=\emptyset$

(iii) $B=\left\{t=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\;\middle|\; n,m=1,2,3,\dots\right\}$ とすると

$$B^d=\{0\}\cup A,\quad (B^d)^d=\{0\},\quad ((B^d)^d)^d=\emptyset$$

証明　"(i)" $\mathbb{Q}$ の稠密性より、$[0,1]$ の各点の ε 近傍は M の点を無限個含む。

"(ii)" $(-\varepsilon,\varepsilon)$ は M の点 $\dfrac{1}{n}$ を無限個含むから、0 は集積点である。$\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n-1}\right)$ に含まれる M の点は $\dfrac{1}{n}$ だけであるから、M の各点は孤立点。

"(iii)" $(-\varepsilon,\varepsilon)$ は M の点 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}$ を無限個含むから、0 は集積点である。n を固定するとき $\left(\dfrac{1}{n}-\varepsilon,\dfrac{1}{n}+\varepsilon\right)$ も M の点 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}$ を無限個含むから、$\dfrac{1}{n}$ も集積点である。$\dfrac{1}{n}$ と $\dfrac{1}{n-1}$ の間に集積点がないことを示す。任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\left(\dfrac{1}{n}+\varepsilon,\dfrac{1}{n-1}\right)$ に M の点は有限個しかないことを示す。$k\leqq l$ とし

$$\frac{1}{n}+\varepsilon<\frac{1}{k}+\frac{1}{l}<\frac{1}{n-1}$$

とする。後の "$<$" より $k\geqq n$　前の "$<$" より $\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{k}$ であるから $k<2n$
したがってそのような k は有限個しかない。その各 k に対し

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{k}+\varepsilon<\frac{1}{l}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{k}$$

であるから l も有限個である。■

定理 3.22 $(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$

定理 3.23 A^d は閉集合。

定理 3.24 $(A^d)^d\subset A^d$

定義　$A^d=A$ となるとき、A を**完全集合**という。

例 3.25 閉区間 $[a,b]$ は完全集合。

定理 3.26 A に孤立点がなければ、$\overline{A}$ は完全集合。

問題

- 以下の各問において、X は一般の距離空間を表し、集合はすべて、X の部分集合であるものとする。
- ただ命題が述べられている場合には、証明するか、その否定を証明せよ。

3.27 有限集合は閉集合。

3.28 $\overline{N(p,\varepsilon)} = \{q \in X \mid d(p,q) \leqq \varepsilon\}$

3.29 集合 X に対して、$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

とおくと、$[X,d]$ は距離空間で、$\mathcal{O}(d) = \mathcal{P}(X)$ である。

3.30 距離空間 $[X,d]$ に対し、d と $\sqrt{d}$ は同値である。

3.31 同じく、d と $\min\{1,d\}$ とは同値である。

- 距離空間 $[X,d]$ において

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分大きな N をとると

$$n \geqq N \ \Rightarrow\ p_n \in N(p,\varepsilon)$$

となるときである。そのとき列 $p_1, p_2, \ldots$ は点 p に**収束する**という。

3.32 X の部分集合 A に対して

$$p \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ の点列 } p_1, p_2, \ldots \text{ で } p \text{ に収束するものがある。}$$

- $p \in X$ と $A \subset X$ に対し、p と A との**距離**を

$$d(p,A) = \inf\{d(p,a) \mid a \in A\}$$

により定める。

3.33 $p \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad d(p,A) = 0$

3.34 各 $A \subset X$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$N(A,\varepsilon) = \{p \mid p \in X \text{ かつ } d(p,A) < \varepsilon\}$$

とおくとき

$$N(A,\varepsilon) = \bigcup_{p\in A} N(p,\varepsilon)$$

3.35 $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon>0} N(A, \varepsilon)$

3.36 数直線 $\mathbb{R}$ の中で 2 進小数全体

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{ \frac{n}{2^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

は稠密である。

3.37 数直線 $\mathbb{R}$ の中で

$$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} = \left\{ n + \sqrt{2}\,m \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

は稠密である。

3.38 以下に与える $\mathbb{R}^2$ の部分集合の閉包を求めよ。

(i) $A = \{(x, y) \mid y = 0\}$

(ii) $B = \{(x, y) \mid x > 0$ かつ $y \neq 0\}$

(iii) $C = A \cup B$

(iv) $D = \{(x, y) \mid x + y$ は有理数 $\}$

(v) $E = \{(x, y) \mid 0 < x^2 - y^2 \leqq 1\}$

(vi) $F = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \neq 0 \text{ かつ } y \leqq \frac{1}{x} \right\}$

3.39 $X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left(x - 1 - \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right\}$$

とするとき、その閉包を求めよ。

3.40 $Y \subset \mathbb{R}^2$ を

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \mid (x - n)^2 + y^2 = n^2\}$$

とするとき、その閉包を求めよ。

3.41 $Z \subset \mathbb{R}^2$ を

$$Z = \bigcup_{r \in (1,2) \cap \mathbb{Q}} \{(x, y) \mid (x - r)^2 + y^2 = r^2\}$$

とするとき、その閉包を求めよ。

3.42 $W \subset \mathbb{R}^2$ を

$$W = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(x, \frac{1}{\cos x} + n \right) \middle| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$$

とするとき、その閉包を求めよ。

3.43 $\mathbb{R}$ の開集合 A, B で、4 つの集合

$$\overline{A} \cap B, \quad A \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

がすべて異なるものを作れ。

3.44 G を X の開集合とする。$A \subset X$ に対し $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$

3.45 任意の $A \subset X$ に対し $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$ ならば G は X の開集合。

3.46 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合の族とする。

(i) $\displaystyle\bigcup_\lambda \overline{A_\lambda} \subset \overline{\bigcup_\lambda A_\lambda}$ を示せ。

(ii) $\displaystyle\bigcup_\lambda \overline{A_\lambda} \neq \overline{\bigcup_\lambda A_\lambda}$ となる例を示せ。

3.47 $\displaystyle\bigcup_\lambda \overline{A_\lambda} \supset \overline{\bigcup_\lambda A_\lambda}$ の次の "証明" の誤りを指摘せよ。

間違った証明 $p \in \overline{\bigcup_\lambda A_\lambda}$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、p の ε 近傍 $N(p, \varepsilon)$ は $\displaystyle\bigcup_\lambda A_\lambda$ と交わる。すなわち、ある λ に対し、$N(p, \varepsilon)$ は A_λ と交わる。よって、その λ に対し、$p \in \overline{A_\lambda}$ したがって、$p \in \displaystyle\bigcup_\lambda \overline{A_\lambda}$

3.48 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合の族とする。$\displaystyle\bigcup_\lambda \overline{A_\lambda}$ が閉集合ならば、$\displaystyle\bigcup_\lambda \overline{A_\lambda} = \overline{\bigcup_\lambda A_\lambda}$

- $A \subset X$ に対し

$$\mathrm{int}(A) = \{p \in A \mid \exists\varepsilon > 0 \text{ に対し } N(p, \varepsilon) \subset A\}$$

とおき、部分集合 A の**内部**という。

3.49 $\mathrm{int}(A)$ は A に含まれる最大の開集合である。

3.50 $U_1, U_2, \dots, U_k$ を X の互いに交わらない開集合で $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)} = X$ となるものとするとき、$1 < l < k$ なる l に対して

$$\mathrm{int}\left(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \cdots \cup \overline{U}_l\right) = X - \left(\overline{U}_{l+1} \cup \overline{U}_{l+2} \cup \cdots \cup \overline{U}_k\right)$$

- $A \subset X$ に対し、$\alpha(A) = \mathrm{int}(\overline{A}),\ \beta(A) = \overline{\mathrm{int}(A)}$ とおく。

3.51 A が開集合ならば $A \subset \alpha(A)$、A が閉集合ならば $\beta(A) \subset A$

3.52 任意の $A \subset X$ に対し、$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ かつ $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

3.53 U, V が X の開集合で $U \cap V = \emptyset$ のとき、$\alpha(U) \cap \alpha(V) = \emptyset$

3.54 $\mathbb{R}$ の部分集合 A で、7 つの集合

$$A, \quad \mathrm{int}(A), \quad \overline{A}, \quad \alpha(A), \quad \beta(A), \quad \alpha(\mathrm{int}(A)), \quad \beta(\overline{A})$$

がすべて異なるものを作れ。

3.55 X の部分集合 A に対し、補集合をとる操作 $A \mapsto X - A = A^c$ と閉包をとる操作 $A \mapsto \overline{A} = A^a$ の 2 つの操作を考える。

(i) 与えられた A に対して、これらの操作を何回か続けて行って得られる集合はいろいろあり得るが、多くとも 14 種類に限ることを示せ。

(ii) $\mathbb{R}$ の部分集合 A で、上の 14 種類の集合がすべて異なるものを作れ。

- $A \subset X$ に対し、$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \mathrm{int}(A)$ とおく。$\mathrm{Fr}(A)$ を A の**境界**という。

3.56 (i) $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A), \quad \mathrm{Fr}(\mathrm{int}(A)) \subset \mathrm{Fr}(A)$

(ii) $\mathbb{R}$ の部分集合 A で、$\mathrm{Fr}(A),\ \mathrm{Fr}(\overline{A}),\ \mathrm{Fr}(\mathrm{int}(A)),\ \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))$ がすべて異なるものを作れ。

3.57 A を開集合とすると $\mathrm{int}(\mathrm{Fr}(A)) = \emptyset$

3.58 $A, B \subset X$ に対し $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$

3.59 $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ ならば、$\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$

3.60 A, B が開集合のとき $(A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \subset \mathrm{Fr}(A \cap B)$

3.61 A, B が開集合のとき $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B))$

3.62 $\mathbb{R}$ の開集合 A, B で前 2 問の 3 つの集合がすべて異なるものを作れ。

3.63 $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))$

3.64 $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B) = \emptyset$ のとき、$\mathrm{int}(A \cup B) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$

3.65 $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B) = \emptyset$ のとき、$\mathrm{Fr}(A \cap B) = (\overline{A} \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \overline{B})$

4　部分空間と積空間

Y を距離空間 X の部分集合とする。X 上の距離関数 d を $Y\times Y$ に制限したものを d_Y とおくと、$d_Y=d|_{Y\times Y}$ は Y 上の距離関数になる。（確かめよ。）

定義　距離空間 $[Y,d_Y]$ を距離空間 $[X,d]$ の**部分空間**という。

例　$\mathbb{R}^n$ の部分空間 S^{n-1} を

$$\begin{aligned}S^{n-1}&=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|=1\}\\&=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2=1\}\end{aligned}$$

と定める。$n-1$ **次元単位球面**（$n=2$ のときは単位円）という。

例　$\mathbb{R}^n$ の部分空間 D^n を

$$\begin{aligned}D^{n}&=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqq 1\}\\&=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\leqq 1\}\end{aligned}$$

と定める。n **次元単位球体**（$n=2$ のときは単位円板）という。

例　$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathring{D}^n$ を

$$\begin{aligned}\mathring{D}^{n}&=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|<1\}\\&=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2<1\}\end{aligned}$$

と定める。n **次元単位開球体**（$n=2$ のときは単位開円板）という。

例　$\mathbb{R}^n$ の部分空間 I^n を

$$I^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid 0\leqq x_i\leqq 1, i=1,2,\ldots,n\}$$

と定める。n **次元単位立方体**（$n=2$ のときは単位正方形）という。

例　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対し、$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合 $A\times I$ を A の**柱**という。

$$A\times I=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)\mid (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A, t\in I\}$$

である。

$I^n=I^{n-1}\times I$ である。特に、正方形の柱は立方体である。

例　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対し、$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合 $\mathrm{C}(A)$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(A)=&\{(1-t)(x_1,x_2,\ldots,x_n,0)+t(0,0,\ldots,0,1)\mid\\&(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A, t\in I\}\end{aligned}$$

と定める。A を底とする**錐**という。A の点 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を動かすとき、$\mathbb{R}^{n+1}$ の 2 点 $(x_1,x_2,\ldots,x_n,0),(0,0,\ldots,0,1)$ を結ぶ線分たちのつくる集合である。$(0,0,\ldots,1)$ のかわりに $(0,0,\ldots,h)$ をとるものを、高さ h の錐という。

正 4 面体は正三角形を底とする錐である。円錐は円周または円板を底とする錐である。

Y の点 $p \in Y$ に対して、$N(p,\varepsilon)$ は X における ε 近傍であるが、Y における ε 近傍でないことがある。Y における ε 近傍は

$$N_Y(p,\varepsilon) = N(p,\varepsilon) \cap Y = \{q \in Y \mid d(p,q) < \varepsilon\}$$

で与えられる。

定理 4.1 $B \subset Y$ が部分空間 Y の開集合である必要十分条件は $B = A \cap Y$ となる X の開集合 A が存在することである。

証明 "$\Rightarrow$" $B \subset Y$ を Y の開集合とする。各 $p \in B$ に対し、ある $\varepsilon_p > 0$ を選んで、$N_Y(p,\varepsilon_p) \subset B$ とすることができる。これらの $\varepsilon_p > 0$ に対し、$A = \bigcup_{p \in B} N(p,\varepsilon_p)$ とおくと、$A \subset X$ は開集合で

$$A \cap Y = \bigcup_{p \in B} N(p,\varepsilon_p) \cap Y = \bigcup_{p \in B} N_Y(p,\varepsilon_p) = B$$

"$\Leftarrow$" $A \subset X$ が開集合で、$B = A \cap Y$ とする。$p \in B$ に対し、ある $\varepsilon > 0$ を選んで、$N(p,\varepsilon) \subset A$ とすることができる。そのとき、$N_Y(p,\varepsilon) \subset A \cap Y = B$ である。■

定理 4.2 $D \subset Y$ が部分空間 Y の閉集合である必要十分条件は $D = C \cap Y$ となる X の閉集合 C が存在することである。

A を Y の部分集合とするとき、A の X での閉包 $\overline{A}$ は Y に含まれないことがある。したがって、A の Y での閉包 $\overline{A}^Y$ は $\overline{A}$ と異なることがある。

定理 4.3 $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$

例 4.4 半開区間 $[0,1)$ は数直線 $\mathbb{R}$ の閉集合でも開集合でもないが、開区間 $(-1,1)$ の閉集合であり、閉区間 $[0,2]$ の開集合でもある。

定理 4.5 (開の開は開) $B \subset Y$ が部分空間 Y の開集合で、$Y \subset X$ が X の開集合であれば、$B \subset X$ は X の開集合である。

定理 4.6 (閉の閉は閉) $D \subset Y$ が部分空間 Y の閉集合で、$Y \subset X$ が X の閉集合であれば、$D \subset X$ は X の閉集合である。

例 4.7 X を数直線 $\mathbb{R}$、その部分集合 Y を有理数全体 $\mathbb{Q}$ とする。

(i) $A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < r \leqq \sqrt{3} \right\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合であり、かつ、閉集合でもある。

(ii) $B = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < r \leqq 2\right\}$ は $\mathbb{Q}$ の閉集合で、開集合でない。

(iii) $C = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid 1 < r \leqq \sqrt{3}\right\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合で、閉集合でない。

(iv) $D = \{r \in \mathbb{Q} \mid 1 < r \leqq 2\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合でなく、閉集合でもない。

定義 4.8 $[X, d_X]$ と $[Y, d_Y]$ を距離空間とするとき、$X \times Y$ 上の積距離 $d_{X\times Y}$ を

$$d_{X\times Y}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, y_1)^2 + d_Y(x_2, y_2)^2}$$

とおくと、$[X \times Y, d_{X\times Y}]$ は距離空間になる。$[X, d_X]$ と $[Y, d_Y]$ の**積距離空間**という。

例 4.9 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の積距離空間は Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+m}$ である。

$X \times Y$ 上の距離は他の選び方もある。

定理 4.10 $X \times Y$ 上の距離 d_∞ を

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_X(x_1, y_1), d_Y(x_2, y_2)\}$$

とおくと、$[X \times Y, d_\infty]$ は距離空間になる。

定理 4.11 $[X \times Y, d_\infty]$ と $[X \times Y, d_{X\times Y}]$ は同値な距離空間である。

定理 4.12 $X \times Y$ 上の距離 d_1 を

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_X(x_1, y_1) + d_Y(x_2, y_2)$$

とおくと、$[X \times Y, d_1]$ は距離空間になる。

定理 4.13 $[X \times Y, d_1]$ と $[X \times Y, d_{X\times Y}]$ は同値な距離空間である。

問題

4.14 S^2 を $\mathbb{R}^3$ の中の単位球面とする。

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

S^2 の点 p, q に対し $d_{arc}(p, q)$ を S^2 上で p と q を結ぶ最も短い道の長さとする。そのとき $[S^2, d_{arc}]$ は距離空間である。さらに、$d_{arc}(p, q)$ を p, q の式で表せ。

4.15 積距離空間 $X \times X$ において、$X \times X$ の部分集合 $\Delta = \{(p, p) \mid p \in X\}$ は閉集合である。

5 連続写像

写像または関数の連続性を厳密に定義し、それを用いて厳密な証明を組み立てることは、なかなか難しいことであった。高校数学では、「限りなく近づくとき」という言葉を用いて表現された。すなわち、y が x に限りなく近づくとき、$f(y)$ が $f(x)$ に限りなく近づくならば、関数 f は連続である、と定義したのである。この定義は十分に厳密なのであるが、大規模な一般論を展開するには不便である。たとえば、連続関数の極限が連続関数になるための条件、一様収束性を、このような論法で述べるのは困難であろう。

そこで登場するのが、いわゆる、ε-δ 論法である。区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f: I \to \mathbb{R}$ の連続性の定義を思い出そう。関数 f が x で連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta_{x,\epsilon} > 0$ で

$$y \in I \text{ かつ } |y - x| < \delta_{x,\epsilon} \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

となるものが存在するときであった。I の各点で f が連続のとき、f は連続であると定めた。

ここで、$\delta_{x,\epsilon}$ という記号を用いたのは、この $\delta = \delta_{x,\epsilon}$ が ε だけでなく、x にもよって定まるということを、表したかったからである。

この定義の中にでてくる $|y - x|, |f(y) - f(x)|$ は $\mathbb{R}$ の距離関数である。($d(x, y) = |y - x|,\ d(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)|$) そこで、距離関数を用いて、ふたつの距離空間 $[X, d_X], [Y, d_Y]$ の間の写像の連続性を定義しよう。

定義 $[X, d_X]$ と $[Y, d_Y]$ を距離空間とする。X の部分集合 A から Y への写像 $f: A \to Y$ が、X の 1 点 x で**連続** (continuous) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta_{x,\epsilon} > 0$ で

$$y \in A \text{ かつ } d_X(y, x) < \delta_{x,\epsilon} \Rightarrow d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

となるものが存在することである。さらに、f が A の各点で連続なとき、f は連続であるという。

例 5.1 (i) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ は連続である。

(ii) $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$ は連続である。

例 5.2 (i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x + y$ は連続である。

(ii) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = xy$ は連続である。

定理 5.3 X, Y, Z を距離空間とし、$f: X \to Y, g: Y \to Z$ を連続写像とすると $g \circ f: X \to Z$ も連続写像である。

定理 5.4 積距離空間からの写像 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ を

$$p_1(x, y) = x, \quad p_2(x, y) = y$$

とおくと、p_1, p_2 はともに連続である。

定理 5.5 さらに $[Z, d_3]$ をもうひとつの距離空間とする。写像 $f : Z \to X,\ g : Z \to Y$ に対して、写像 $h : Z \to X \times Y$ を

$$h(z) = (f(z), g(z))$$

とおくとき

$$h \text{ は連続} \iff f, g \text{ はともに連続}$$

問 5.6 (**5.1**)〜(**5.5**) を用いて、次の $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ。

$$f(x) = \frac{x^3 + 2\,x^2}{x^2 + x + 1}$$

定義 $[X, d_X]$ と $[Y, d_Y]$ を距離空間とする。X の部分集合 A から Y への写像 $f : A \to Y$ が、**一様連続**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、命題

$$x, y \in A \text{ かつ } d_X(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

が成り立つことである。

問 5.7 (i) 一様連続と連続の定義はどう違うのか説明せよ。

(ii) 一様連続でない連続写像の例を示せ。

定理 5.8 一様連続写像は連続である。

定理 5.9 2 つの距離空間 $[X, d_X], [Y, d_Y]$ の間の写像 $f : X \to Y$ に関する条件 (i)〜(iv) はすべて同値である。

(i) f は連続である。

(ii) U を Y の開集合とすると、$f^{-1}(U)$ は X の開集合である。

(iii) F を Y の閉集合とすると、$f^{-1}(F)$ は X の閉集合である。

(iv) X の任意の部分集合 A に対して、$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ である。

定理 5.10 $[X, d]$ を距離空間、$X = U \cup V$ で U, V は開集合、さらに $f : U \to Y,\ g : V \to Y$ が連続で、任意の $x \in U \cap V$ に対して $f(x) = g(x)$ とする。$h : X \to Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \text{ のとき} \\ g(x) & x \in V \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと、h は連続である。

定理 5.11 $[X,d]$ を距離空間、$X = K \cup L$ で K, L は閉集合、さらに $f : K \to Y,\ g : L \to Y$ が連続で、任意の $x \in K \cap L$ に対して $f(x) = g(x)$ とする。$h : X \to Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K \text{ のとき} \\ g(x) & x \in L \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと、h は連続である。

定理 5.12 $[X,d]$ を距離空間、$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を開被覆とし、さらに $f_\lambda : U_\lambda \to Y$ が連続で、任意の $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対して $f_\lambda(x) = f_\mu(x)$ とする。$f : X \to Y$ を

$$x \in U_\lambda \ \Rightarrow \ f(x) = f_\lambda(x)$$

により定めると、f は連続である。

定義 被覆 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ が**局所有限** (locally finite) であるとは、X の任意の点 x に対して、近傍 U_x を十分小さくとるとき、U_x と交わる K_λ が有限個だけであるとき

定理 5.13 $[X,d]$ を距離空間、$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ を局所有限閉被覆とし、さらに $f_\lambda : K_\lambda \to Y$ が連続で、任意の $x \in K_\lambda \cap K_\mu$ に対して $f_\lambda(x) = f_\mu(x)$ とする。$f : X \to Y$ を

$$x \in K_\lambda \ \Rightarrow \ f(x) = f_\lambda(x)$$

により定めると、f は連続である。

ある意味で、連続写像は群論、線型空間等の準同型写像に似た概念である。同様な考え方で、同型写像に相当するものが、次に定義する同相写像である。

定義 距離空間 X, Y に対して、写像 $f : X \to Y$ が全単射で、f も逆写像 f^{-1} も連続であるとき、f を**同相写像** (homeomorphism) であるという。そして、同相写像 $f : X \to Y$ が存在するとき、距離空間 X と Y は**同相**であるという。記号 $X \approx Y$ で表す。

例 5.14 (i) 有界閉区間はすべて同相である。$[0,1] \approx [a,b]$

(ii) 開区間はすべて同相である。$(0,1) \approx (a,b) \approx (a,\infty) \approx (-\infty,b) \approx \mathbb{R}$

(iii) 半開区間はすべて同相である $[0,1) \approx [a,b) \approx [a,\infty) \approx (0,1] \approx (a,b] \approx (\infty,b]$

例 5.15 開円板 $\mathrm{int}(D^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ は平面 $\mathbb{R}^2$ と同相である。

例 5.16 穴のあいた平面 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ は円柱 $S^1 \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相である。

例 5.17 穴のあいた球面 $S^2 - \{(0,0,1)\}$ は平面 $\mathbb{R}^2$ と同相である。

● Peano **曲線**

閉区間 $[0,1]$ から正方形 $[0,1]\times[0,1]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1\}$ への連続な全射 f を構成しよう。Cantor 集合を集合の列 $\{C_n\}$ で定義したように、Peano 曲線の場合は、t に対して $f(t)$ を小区間 (小正方形) の列の共通部分として定めよう。

(i) 正方形 $S=I^2$ を 4 等分して S_0, S_1, S_2, S_3 をそれぞれ、左下、左上、右上、右下にとる。

1	2
0	3

区間 $I=[0,1]$ を 4 等分して、小区間を I_0, I_1, I_2, I_3 とし、I_i を S_i に写す連続写像 $f_1 : I\to S$ をつくる。

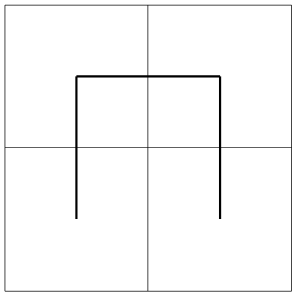


図 1: f_1

(ii) (i) のコピーを 4 つ用意し、各成分の頭にそれぞれ $0,1,2,3$ をつける。そして、第 0, 第 3 コピーは上下を逆にする。

00	03		11	12		21	22		30	33
01	02		10	13		20	23		31	32

第 0 コピーを左に 90° 回転し、第 1 コピーの下に移動する。
第 3 コピーを右に 90° 回転し、第 2 コピーの下に移動する。

11	12	21	22
10	13	20	23
03	02	31	30
00	01	32	33

その結果、00 は左下、33 は右下、ij を 4 進表示 $n=4i+j$ と思うと、n と $n+1$ とは常に隣り合っていることに注意する。$S=I^2$ を 16 等分して S_{ij} をこの表の ij の位置にとる。区間 $I=[0,1]$ を 16 等分して、小区間を $I_{00}, I_{01}, \ldots, I_{33}$ とし、I_{ij} を S_{ij} に写す連続写像 $f_2 : I\to S$ をつくる。

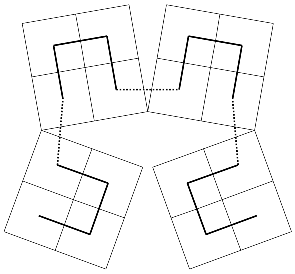


図 2: f_1 から f_2 をつくる

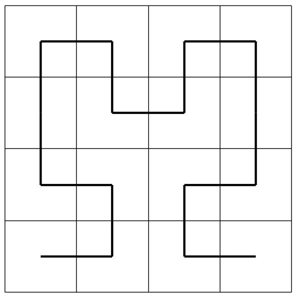


図 3: f_2

(k) 以下これを繰り返す。すなわち、
(k-1) のコピーを 4 つ用意し、各成分の頭にそれぞれ $0, 1, 2, 3$ をつける。
そして、第 0, 第 3 コピーは上下を逆にする。
第 0 コピーを左に $90°$ 回転し、第 1 コピーの下に移動する。
第 3 コピーを右に $90°$ 回転し、第 2 コピーの下に移動する。
その結果、$00\ldots0$ は左下、$33\ldots3$ は右下、$i_1i_2\ldots i_k$ を 4 進表示 $n = i_1 4^{k-1} + i_2 4^{k-2} + \cdots + i_{k-1}4 + i_k$ と思うと、n と $n+1$ とは常に隣り合っていることに注意する。$S = I^2$ を 4^k 等分して $S_{i_1i_2\ldots i_k}$ をこの表の $i_1i_2\ldots i_k$ の位置にとる。

111	112	121	122	211	212	221	222
110	113	120	123	210	213	220	223
103	102	131	130	203	202	231	230
100	101	132	133	200	201	232	233
033	030	023	022	311	310	303	300
032	031	020	021	312	313	302	301
001	002	013	012	321	320	331	332
000	003	010	011	322	323	330	333

I を 4^k 等分して、小区間を $I_{i_1i_2\ldots i_k}$ として、$I_{i_1i_2\ldots i_k}$ を $S_{i_1i_2\ldots i_k}$ に写す

連続写像 $f_k : I \to S$ をつくる。

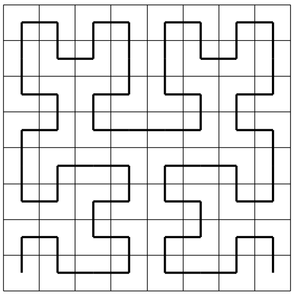


図 4: f_3

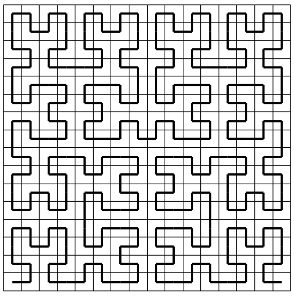


図 5: f_4

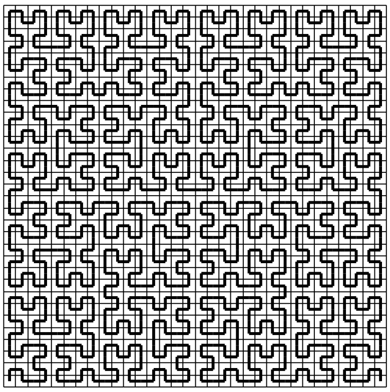


図 6: f_5

写像 $f : I \to I^2$ は、点 $f(t)$ を点 $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots$ の極限として定めるのであるが、次のように表すことができる。$t \in I$ を 4 進小数展開する。

$$\begin{aligned} t &= \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \cdots + \frac{i_k}{4^k} + \cdots \quad (0 \leqq i_k < 4) \\ &= 0.i_1 i_2 i_3 \ldots \end{aligned}$$

すると

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

により、x が定まるので、$f(t) = x$ とおく。

定理 (Peano 曲線) $f : I \to I^2$ は全射連続写像。

証明はいくつかの主張に分けて行う。

主張 5.18

$$S_{i_1} \supset S_{i_1 i_2} \supset S_{i_1 i_2 i_3} \supset \cdots$$

で、$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ はただ 1 点。

主張 5.19 $f(t)$ は 4 進表示 $t = 0.i_1 i_2 i_3 \ldots$ の選び方に依らずに定まる。

主張 5.20 $f(t)$ は連続である。

主張 5.21 $f(t)$ は全射である。

問題

5.22 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を次のように与える。

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x\neq 0 \text{ または } y\neq 0 \text{ のとき}\\ 0 & x=y=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

(i) 任意の $x\in\mathbb{R}$ を固定するとき、$t\in\mathbb{R}$ の関数 $f_x(t)=F(x,t)$ は連続であることを示せ。また、任意の $y\in\mathbb{R}$ を固定するとき、$t\in\mathbb{R}$ の関数 $f_y(t)=F(t,y)$ も連続であることを示せ。

(ii) $\theta\in[0,\pi)$ を固定するとき $t\in\mathbb{R}$ の関数 $g_\theta(t)=F(t\cos\theta,t\sin\theta)$ の連続性を論ぜよ。

(iii) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の連続性を論ぜよ。

5.23 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を次で定める。

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{p} & t=\dfrac{q}{p}\ (p,q \text{ は互いに素な整数})\\ 0 & t \text{ は無理数}\end{cases}$$

すると、f は各無理点で連続、各有理点で不連続である。

5.24 2 つの距離空間 $[X,d_X],[Y,d_Y]$ の間の写像 $f:X\to Y$ に関して、次の条件 (*) は、f が連続であるための必要十分条件である。

(*) $p_1,p_2,\ldots$ が $p\in X$ に収束すれば、$f(p_1),f(p_2),\ldots$ は $f(p)\in Y$ に収束する。

5.25 X の部分集合 A を固定するとき、X 上の関数

$$f(x)=d(x,A)$$

は連続である。

5.26 与えられた開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ に対して、U の各点で不連続、$X-U$ の各点で連続である関数の例を示せ。

5.27 (i) 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ のグラフ $\Gamma(f)=\{(x,f(x))\}$ は閉集合である。

(ii) グラフ $\Gamma(f)$ が閉集合であるような、連続でない関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の例を示せ。

5.28 距離関数 $d:X\times X\to\mathbb{R}$ は、$X\times X$ 上の積距離に関して、連続である。

5.29

$$X_n = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\frac{1}{n^2}\right\},\quad X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$$
$$Y_n = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x-1-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right\},\quad Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n$$

とし、$f:Y\to X$ を $f(Y_n)=X_n$ で、同じ偏角の点を対応させるものとする。f は連続であることを示せ。f^{-1} は連続か。

5.30 さらに

$$Z_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-n)^2+y^2=n^2\},\quad Z=\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$$

とし、$g:Z\to Y$ を $g(Z_n)=Y_n$ で、同じ偏角の点を対応させるものとする。g は連続であることを示せ。g^{-1} は連続か。

5.31 重ねてさらに、ある距離空間 $[W,d]$ に対して、写像 $h:Z\to W$ は、各 n に対して制限 $h\mid Z_n$ が連続であっても、連続とは限らないことを示せ。

定義 距離空間 $[X,d],[Y,d']$ の間の写像の列 $\{f_n\}$ と写像 $f:X\to Y$ について、$\{f_n\}$ が f に**収束**するとは、X の各点 x について、$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ となるとき。

定義 さらに、$\{f_n\}$ が f に**一様収束**するとは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、n が十分大きければ

$$d'(f_n(x),f(x))<\varepsilon\quad\forall x\in X$$

となるとき。

5.32 距離空間 $[X,d],[Y,d']$ の間の連続写像の列 $\{f_n\}$ が、写像 $f:X\to Y$ に一様収束するとき、f も連続であることを示せ。

5.33 連続写像が連続写像に収束し、かつ一様収束しない例を示せ。

5.34 Peano 曲線の定義において、各 $t\in I$ に対し、$n\to\infty$ のとき、$f_n(t)\to f(t)$ を示せ。

5.35 Peano 曲線の定義において、f_n は f に一様収束することを示せ。

定義 距離空間 $[X,d]$ の部分集合 A が X の**レトラクト**であるとは、連続写像 $r:X\to A$ で、$a\in A\Rightarrow r(a)=a$ となるとき。

5.36 レトラクトは閉集合。

5.37 (i) 1 点は常にレトラクト。

(ii) 中間値の定理を仮定して、2 点 $\{0,1\}$ は閉区間 $[0,1]$ のレトラクトでないことを示せ。

5.38 (i) x 軸 (“$y=0$”) は $\mathbb{R}^2$ のレトラクト。

(ii) 上半平面 (“$y \geqq 0$”) は $\mathbb{R}^2$ のレトラクト。

(iii) xy 軸 (“$y=0$” または “$x=0$”) は $\mathbb{R}^2$ のレトラクト。

5.39 (i) 弧 (“$\alpha \leq \theta \leq \beta$”) は円周 S^1 のレトラクト。

(ii) 北半球 (“$z \geqq 0$”) は球面 S^2 のレトラクト。

5.40 (i) 半直線 (“$\theta=0$”) は $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ のレトラクト。

(ii) 区間 (“$\theta=0$” かつ “$1 \leqq r \leqq 2$”) は $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ のレトラクト。

(iii) 円周 S^1 は $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ のレトラクト。

6　濃度、有限集合と可算集合

第 3 章で有限集合というものを正式の定義をせずに使った。ここで、有限集合というものをよく検討してみよう。さらに、有限でない集合について、どのようなものがあるか考えてみよう。

集合 A, B に対し、A と B は**対等**である、または、**濃度が等しい**とは、全単射 $f : A \to B$ が存在するときとする。そのとき、それを

$$A \sim B$$

という記号で表す。

定理 6.1　A, B, C を空でない集合とすると

(i) $A \sim A$

(ii) $A \sim B \;\Rightarrow\; B \sim A$

(iii) $A \sim B$ かつ $B \sim C \;\Rightarrow\; A \sim C$

が成り立つ。

このことを「$\sim$ は同値関係である」といいたくなる。しかし、うっかりそういうと、論理的にはとんでもない破綻をきたすことになる。というのは、関係 (より正確には二項関係) とは集合 S 上に定義されるもので、それは $S \times S$ の部分集合 R のことである。S の元 a, b に対し、関係 R が成り立つとは $(a, b) \in R$ のときと定め、aRb と表す。さらに、R が**同値関係**であるとは

(i) $A \sim A$　(反射律)

(ii) $A \sim B \;\Rightarrow\; B \sim A$　(対称律)

(iii) $A \sim B$ かつ $B \sim C \;\Rightarrow\; A \sim C$　(推移律)

の 3 つの条件を満たすことである。

たしかに、$\sim$ は同値関係の条件 (i), (ii), (iii) を満たしている。しかし、$\sim$ を同値関係であるということには、$\sim$ の定義されているものの全体、すなわち、集合の全体が集合であるという主張が含まれている。集合全体の集合というものを考えると、いろいろの矛盾が生じることは、よく知られている。

正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表した。$\mathbb{N}$ の各元 n に対し

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\} = \{i \mid i \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leqq i \leqq n\}$$

とする。

定義　集合 A が**有限**とは、(i) $A = \emptyset$ であるか、(ii) ある n に対し $A \sim I_n$ となるときである。集合が有限でないとき**無限**であるという。

$A \sim I_n$ のとき

$$\mathrm{Card}(A) = n$$

と表す。また

$$\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$$

とおく。すなわち、有限集合 A に対して、ちょうどひとつ整数 n が定まる。この数を集合 A の元の**個数**、または A の**濃度数**という。そのとき

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad (a_i \neq a_j, \quad 1 \leqq i < j \leqq n)$$

と表すことができる。

集合 A が**可算**であるとは、(i) $A = \emptyset$ であるか、(ii) A のすべての元が少なくとも 1 回は現われるような列

$$a_1, a_2, \ldots$$

が存在するときとする。したがって

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

である。ここでは、同じ元が何度も現われることも許される。したがって、すべての有限集合は可算である。すなわち、$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ とすると、$i > n$ に対しては $a_i = a_n$ とおけばよい。もしも $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ で、$i \neq j$ に対して $a_i \neq a_j$ ならば、$A \sim \mathbb{N}$ である。このとき、A は**可算無限**であるといわれ

$$\mathrm{Card}(A) = \aleph_0$$

と表される。($\aleph$ はアレフと読む。)

定理 6.2 A を可算集合とすると、A は、(i) 有限であるか、(ii) $\mathrm{Card}(A) = \aleph_0$ であるかのいずれかである。

定理 6.3 可算集合の部分集合は可算である。

例 6.4 $\mathcal{F}$ を $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体とするとき、$\mathcal{F} \sim \mathbb{N}$

証明 $F \in \mathcal{F}$ とすると、ある n に対し

$$F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

と表されるから、対応する $f(F) \in \mathbb{N}$ を

$$f(F) = 2^{a_1 - 1} + 2^{a_2 - 1} + \cdots + 2^{a_n - 1} + 1$$

とおけば ...

問題

6.5

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ i = \{0, 1, \ldots, i-1\} \quad (i = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

とおくとき、$0, 1, 2, 3, 4$ を書き下せ。

- したがって
  $$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$$
  および
  $$i \in j \iff i < j$$
  が成り立つ。

あらためて

6.6 $X = 2 = \{0, 1\}$ に対して、$Y = X \cup \mathcal{P}(X)$ とおくとき、$Y \cap \mathcal{P}(Y)$ を求めよ。(**1.25** と比較せよ。)

- 次の命題を証明するか、その否定を証明せよ。ただし、問題のなかには、次章以降の内容を用いないとできないものもまざっている。

6.7 (i) $A \sim C,\ B \sim D \ \Rightarrow\ A \cap B \sim C \cap D$

(ii) $A \sim C,\ B \sim D \ \Rightarrow\ A \cup B \sim C \cup D$

6.8 $A \sim C,\ B \sim D \ \Rightarrow\ A \times B \sim C \times D$

6.9 A, B を無限集合とするとき $A \sim A \cup B$ または $B \sim A \cup B$

6.10 $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C), \quad A \times B \sim B \times A$

6.11 $\mathbb{Q} \cap (0, 1] \sim \mathbb{N}$

6.12 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

6.13 自然数の順序対 (a_1, a_2) の全体のつくる集合は可算集合である。

6.14 2 つの自然数からなる集合 $\{a_1, a_2\}$ 全体のつくる集合は可算集合である。

6.15 整数の有限列 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 全体 (n も動く) のつくる集合は可算集合である。

6.16 整数の (無限) 列 $a = (a_1, a_2, \ldots)$ 全体のつくる集合は可算集合である。

6.17 0 と 1 を成分とする列 $s = (s_1, s_2, \ldots)$ 全体のつくる集合 S は可算集合である。

6.18 $S \times S \sim S$

6.19 $S \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

6.20 可算個の有限集合 $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ の合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ は可算である。

6.21 可算個の可算集合 $C_n (n = 1, 2, \ldots)$ の合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ は可算である。

実数 x が**代数的**であるとは、整数を係数とする n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の解であるときである。

6.22 代数的数の全体 A は可算集合である。

実数のうち、代数的でないものを**超越数**という。

6.23 超越数全体のつくる集合 T は可算集合である。

6.24 $G : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ を $G(t) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < t\}$ とすると、G は単射である。

6.25 $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$、すなわち、$\mathcal{G}$ を正の整数の集合族とする。任意の $G, G' \in \mathcal{G}$ に対して、$G \subset G'$ か $G' \subset G$ のいずれかが成り立っているとすると、$\mathcal{G}$ は可算集合である。

- 通常の集合論では次の正則性の公理を仮定する。

正則性の公理　$A \neq \emptyset$ とすると A の元 a で

$$b \in A \ \Rightarrow \ b \notin a$$

を満たすものが存在する。

- 正則性の公理を仮定して次の問に答えよ。

6.26 (i) $X \in X$ を満たす集合 X は存在しない。

(ii) $X_1 \in X_2, X_2 \in X_3, \ldots, X_{k-1} \in X_k, X_k \in X_1$ を満たす集合 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ は存在しない。

6.27 X の元の列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ で

$$x_{k+1} \in x_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たすものは存在しない。

7 $\mathbb{R}$ の完備性、非可算集合

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ が可算でないことの証明にとりかかる。前章で見たように、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である。そこで、$\mathbb{R}$ の非可算性を証明するには、有理数にはない実数の特徴である $\mathbb{R}$ の“ 連続性 ”を用いなければならない。それは、次のように定式化される。

集合 S 上の**順序**とは、S 上の二項関係 $\leqq$ で次の条件を満たすもののことである。

(O$_1$) $x \leqq x$ (反射律)

(O$_2$) $x \leqq y$ かつ $y \leqq x \Rightarrow x = y$ (反対称律)

(O$_3$) $x \leqq y$ かつ $y \leqq z \Rightarrow x \leqq z$ (推移律)

$\leqq$ を S 上の順序とするとき、対 $[S, \leqq]$ は**順序集合**と呼ばれる。さらに、S 上の順序 $\leqq$ が次の条件を満たすとき、**全順序**または**線型順序**と呼ばれる。

(O$_4$) $x \leqq y$ または $y \leqq x$

そのとき、$[S, \leqq]$ は、**全順序集合**または**線型順序集合**と呼ばれる。$x \leqq y$ のかわりに $y \geqq x$ と書くこともある。また $x > y, y < x$ は、ともに、$x \geqq y$ かつ $x \neq y$ を表す。

$\leqq$ を $\mathbb{R}$ の通常の順序とするとき、$[\mathbb{R}, \leqq]$ は線型順序集合である。

一般の線型順序集合 $[S, \leqq]$ の部分集合 $A \subset S$ に対して、次のような定義をおく。$b \in S$ が A の**上界**であるとは、すべての $a \in A$ に対して、$a \leqq b$ が成り立つときである。そのような b が存在するとき、A は**上に有界**であるという。(同様に**下界** (かかい)、**下に有界**も定義される。) 上に有界な、空でない部分集合に対し、つねに、最小上界が存在するとき、$[S, \leqq]$ は Dedekind **の意味で完備** (短く D **完備**) であるという。A の最小上界は、通常、**上限**と呼ばれ

$$\sup A$$

と表される。

上限公理 $[\mathbb{R}, \leqq]$ は D 完備である。

これにより、次が証明される。

定理 7.1 (区間縮小法)

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$$

を $\mathbb{R}$ の閉区間の減少列とする、すなわち、各 i に対して

$$[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$$

となっているとする。そのとき

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

である。

区間縮小法は公理として採用されることがある。区間縮小法を用いると、次のことが証明できる。

定理 7.2 $\mathbb{R}$ は非可算集合である。

証明 $\mathbb{R}$ が可算集合だと仮定して、矛盾を導く。

$$\mathbb{R} = \{t_1, t_2, \ldots\}$$

と表されたとする。閉区間 $I_0 = [0, 1]$ とおく。I_0 を三等分し、三つの小閉区間をそれぞれ左から I_{00}, I_{01}, I_{02} とおく。t_1 が I_{00} に含まれなければ $I_1 = I_{00}$ とおき、そうでなければ $I_1 = I_{02}$ とおく。いずれにしても I_1 には t_1 は含まれない。

以下同様に、I_n まで得られたとする。I_n を三等分して I_{n0}, I_{n1}, I_{n2} を得る。t_{n+1} が I_{n0} に含まれなければ $I_{n+1} = I_{n0}$ とし、そうでなければ $I_{n+1} = I_{n2}$ とする。...

この定理の証明には、Georg Cantor の対角線論法を使うことが多いが、ここでは別の証明を採用した。対角線論法自体は理解しにくいものではないが、この定理の証明にそれを用いるためには、実数の十進記数法に関する、正確な知識が必要である。

$A \sim \mathbb{R}$ のとき

$$\mathrm{Card}(A) = \mathfrak{c}$$

と表す。ここで、$\mathfrak{c}$ は連続濃度と呼ばれる。論理上のいくつかの問題点を回避するために、記号 $\mathrm{Card}(A)$ と $\mathfrak{c}$ は単独では用いず、$\mathrm{Card}(A) = \mathfrak{c}$ と書くときだけ意味をもち、$A \sim \mathbb{R}$ を表すものとする。$\mathrm{Card}(A) = \aleph_0$ に関しても同じである。

非可算集合には次のような単純な構成のものもある。

定理 7.3 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は非可算集合である。

直接証明するより、より一般的な次の定理を示すほうが議論がわかりやすい。

定理 7.4 (Georg Cantor) 任意の集合 X に対して、X と $\mathcal{P}(X)$ は濃度同値でない。実は、より強く、いかなる $f : X \to \mathcal{P}(X)$ も全射ではない。

証明　X から $\mathcal{P}(X)$ への全射 $f: X \to \mathcal{P}(X)$ が存在したと仮定して、矛盾を導こう。$x \in X$ に対して、$f(x)$ は X の部分集合である。したがって、$x \in f(x)$ か、$x \notin f(x)$ かのいずれかが必ず成り立つ。ここで

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

とおくと、fは全射だから ...

A と B が濃度同値でないとき、$A \not\sim B$ とかく。したがって、つねに $X \not\sim \mathcal{P}(X)$ である。これは空集合 $\emptyset$ に対してさえも正しい。空集合 $\emptyset$ は部分集合 $\emptyset$ をただひとつだけ含むが、いかなる元も含まない。

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$$

問題

7.5 (G. Cantor の対角線論法による $\mathbb{R}$ の非可算性の証明)　半開区間 $[0,1)$ が可算集合だと仮定して、矛盾を導けば十分である。

$$[0,1) = \{t_1, t_2, \ldots\}$$

と表されたとする。各 t_i を 10 進小数展開をして

$$t_i = 0.t_1^{(i)} t_2^{(i)} t_3^{(i)} \cdots t_j^{(i)} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j^{(i)}}{10^j}$$

とする。ただし、有限小数で表されるものは、2 通りの表示法 $0.20000\cdots = 0.19999\cdots$ があるが、有限表示 (左辺) をとるものとする。ここで、新しく

$$t_0 = 0.t_1^{(0)} t_2^{(0)} t_3^{(0)} \cdots t_j^{(0)} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j^{(0)}}{10^j}$$

$$\text{ただし } t_j^{(0)} = \begin{cases} 2 & t_j^{(j)} \geqq 5 \text{ のとき} \\ 8 & t_j^{(j)} < 5 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば、 ...

7.6　0 と 1 からなる数列の全体 S の元 $s = (s_1, s_2, \ldots)$ に対して、2 進小数

$$f(s) = 0.s_1 s_2 s_3 \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}$$

を対応させせると、S から閉区間 $[0,1]$ への写像 f が得られる。

(i)　f は全射である。

(ii) f は単射でない。$f^{-1}(f(s))$ はどのようになるか調べよ。

7.7 0 と 1 からなる数列の全体 S の元 $s = (s_1, s_2, \ldots)$ に対して、3 進小数

$$g(s) = 0.s_1s_2s_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{3^i}$$

を対応させると、S から閉区間 $[0,1]$ への写像 g が得られる。

(i) g は単射である。

(ii) g は全射でない。$g(S)$ はどのようになるか調べよ。

7.8 $\mathrm{Card}(S) = \mathfrak{c}$

次の命題の成否を調べよ。

7.9 $\mathbb{R}$ の下に有界な、空でない部分集合には、最大下界が存在する。

7.10 $a < b, c < d$ を実数とすると、$[a,b] \sim [c,d]$ である。

7.11 $[0,1] \sim [0,1)$

7.12 $[0,1] \sim (0,1)$

7.13 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$

7.14 $\mathbb{R}$ のいかなる区間も可算ではない。

7.15 $A \subset \mathbb{R}$ が開区間を含めば、$A \sim \mathbb{R}$ である。

7.16 $A \subset \mathbb{R}$ で $A \sim \mathbb{R}$ ならば、A は開区間を含む。

7.17 $U \subset \mathbb{R}$ を非可算集合とすると、U は集積点を含む。

7.18 $U \subset \mathbb{R}$ を非可算集合とすると、$U \cap (-\infty, t)$ も $U \cap (t, \infty)$ も非可算であるような $t \in \mathbb{R}$ が存在する。

7.19 $C \subset \mathbb{R}$ を閉集合とすると、C は、ある可算集合 A の閉包である。

7.20 $[0,1) \times [0,1) \sim [0,1)$

7.21 任意の集合 X に対して、$\mathcal{P}(X)$ から X への単射は存在しない。

これで、いくつかの集合は非可算であることがわかった。前章の問題のうちいくつかは、これらの事実を用いてはじめて証明できる。

8 Bernstein の定理

A, B を集合とする。ある A が B のある部分集合 B' と対等になるとき、すなわち、$A \sim B' \subset B$ となるとき、$A \leqq B$ と表す。もし、$A \leqq B$ で $A \not\sim B$ ならば、$A < B$ と表す。（記号 $<$ は、いくつかのことが成り立つことを暗示しているが、そのうちで明らかに成り立つことは、$A < A$ が不可能であるということだけである。）

定理 8.1 $A \leqq B$ かつ $B \leqq C$ ならば、$A \leqq C$ である。

定理 (Bernstein の定理) A, B を集合とする。$A \leqq B$ かつ $B \leqq A$ ならば、$A \sim B$ である。

証明 $A \sim B' \subset B$ より、全単射 $f : A \to B'$ がある。f を A から B への単射と思う。また、$B \sim A' \subset A$ より、単射 $g : B \to A$ が存在する。$a \in A$ に対し、$a = a_0$ とおき、$g(a_1) = a_0$ となる $a_1 \in B$ があれば、a_1 を a_0 の親と呼ぶ。さらに $f(a_2) = a_1$ となる $a_2 \in A$ があれば、a_2 を a_0 の 2 代前の親と呼ぶ。f, g は単射であるから、親はあれば一意的である。このように考えると、A は次の 3 つの集合にわかれる。

$$
\begin{aligned}
A_\infty &= \{a \in A \mid \text{すべての } n \text{ に対し、} n \text{ 代前の親は存在する}\} \\
A_A &= \{a \in A \mid \text{ある } n \geqq 0 \text{ に対し、} a_{2n} \in A \text{ は存在するが、} \\
&\qquad\qquad a_{2n+1} \in B \text{ は存在しない}\} \\
A_B &= \{a \in A \mid \text{ある } n \geqq 0 \text{ に対し、} a_{2n+1} \in B \text{ は存在するが、} \\
&\qquad\qquad a_{2n+2} \in A \text{ は存在しない}\}
\end{aligned}
$$

また、B も同様に 3 つの集合にわかれる。

$$
\begin{aligned}
B_\infty &= \{b \in B \mid \text{いつまでも親がたどれる}\} \\
B_A &= \{b \in B \mid \text{ちょうど } 2n+1 \text{ 代前の親 } b_{2n+1} \in A \text{ までたどれる}\} \\
B_B &= \{b \in B \mid \text{ちょうど } 2n \text{ 代前の親 } b_{2n} \in B \text{ までたどれる}\}
\end{aligned}
$$

主張 8.2 $f \mid A_\infty : A_\infty \to B_\infty,\ g \mid B_\infty : B_\infty \to A_\infty$ は全単射である。

主張 8.3 $f \mid A_A : A_A \to B_A,\ g \mid B_B : B_B \to A_B$ は全単射である。

主張 8.4 Bernstein の定理が成り立つ。

定理 8.5 $A < B \leqq C$ または $A \leqq B < C$ ならば、$A < C$ である。

ここまでくると、任意のふたつの集合は、濃度の大小を比べられるかと問うことは自然である。すなわち、$A \leqq B$ か $A \geqq B$ のいずれかは成り立つのだろうか。じつは、これは正しいことがわかる。しかし、その証明は、いま

までに述べられた定理の証明より、格段にむずかしい。これまでのところは、仮定により与えられた全単射を、組み合わせたり細工をしたりすることにより、証明できた。まったく何の対応も与えられていない集合に対して、単射 $A \to B$ または $B \to A$ を作ることは、より高い次元の困難をともなうことなのである。

例 8.6 $A = [0,1),\ B = [0,1]$ とし、単射 $f : A \to B,\ g : B \to A$ を

$$f(t) = t, \quad g(t) = \frac{1}{2}t$$

とすると

$$\begin{aligned}
A_A &= (A - g(B)) \cup g \circ f\,(A - g(B)) \cup \cdots \cup (g \circ f)^n\,(A - g(B)) \cup \cdots \\
&= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \cdots \\
B_B &= (B - f(A)) \cup f \circ g(B - f(A)) \cup \cdots \cup (f \circ g)^n (B - f(A)) \cup \cdots \\
&= \{1\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup \cdots \\
A_B &= g(B_B) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup \left\{\frac{1}{8}\right\} \cup \cdots \\
B_A &= f(A_A) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \cdots \\
A_\infty &= A - (A_A \cup A_B) = \{0\} \\
B_\infty &= B - (B_B \cup B_A) = \{0\}
\end{aligned}$$

したがって、全単射 $h : A \to B$ は

$$h(t) = \begin{cases} 2t & t = \dfrac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ t & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおけばよい。

問題

前章までの問題のうちいくつかは、Bernstein の定理を適用することにより、証明が簡単になることを確かめよ。そのあとで次の問題をやれ。

8.7 上の例について、単射 $f : [0,1) \to [0,1],\ g : [0,1] \to [0,1)$ を

$$f(t) = \frac{1}{2}t, \quad g(t) = \frac{1}{2}t$$

で与えるとき

(i) $A_A, A_B, A_\infty, B_A, B_B, B_\infty$ はそれぞれ何か。

(ii) 全単射 $h : A \to B$ は何か。

8.8 開円板 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ と閉円板 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ との間の全単射を構成せよ。

8.9 無理数全体 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の間の全単射を構成せよ。

8.10 $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^+ \sim \mathbb{R}$

8.11 実数を成分とする数列全体の集合を $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+}$ とすると、$S \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+}$。

8.12 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数の全体 $\sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$

8.13 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数の全体 $\sim \mathbb{R}$

8.14 $f : A \to A$ を全射でない単射とすると、A は可算無限集合を含む。

8.15 すべての無限集合は可算無限集合を含むという事実がある。この事実が正しいという証明を試みてみよ。ただし、成り立ちそうな事実を並べた作文をしてはならない。ひとつひとつ正しい議論を積み重ねて、ギャップを埋めることを考えよ。いままで学んできた事柄のみを用いては、どこかで苦しくなるであろう。しかし、議論を詰めてみることは意味がある。この問題と前問とを比べてみよう。前問では全単射の存在が仮定より導かれる。

8.16 数学的常識の範囲を越えるほど濃度の大きい集合を構成せよ。

9 $\mathbb{R}^n$ におけるコンパクト性

1 変数の微積分学において次の定理は重要である。

定理 9.1 (Heine-Borel の定理) 開区間の族 $\mathcal{G}$ が閉区間 $[a,b]$ を覆っているとき、そのうちの有限個の開区間だけで $[a,b]$ を覆うことができる。

そのような無限被覆は微積分学の中でよく現われる。たとえば、点 $x_0 \in [a,b]$ で連続な関数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ が与えられたとすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\delta_{x_0} > 0$ で

$$x \in [a,b] \text{ かつ } |x - x_0| < \delta_{x_0} \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となるものがある。(これは連続性の定義であるが、別の定義をすることもあり、そのときは、簡単な議論の結果である。) ここで、さらに、f が $[a,b]$ 上のすべての点 x で連続であると仮定すると、各点 $x \in [a,b]$ に対し $\delta_x > 0$ で

$$x' \in [a,b] \text{ かつ } |x' - x| < \delta_x \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

となるものがある。すると

$$\mathcal{G} = \{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}$$

は $[a,b]$ の被覆になっている。Heine-Borel の定理により、ある有限被覆がその中から選べる。

定理 9.2 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると、f は有界である。

(この定理は、Heine-Borel の定理が、いかに微積分学の中で強力であるかを示す一例である。)

例 9.3 Heine-Borel の定理は $\mathbb{R}$ の完備性を本質的に用いている。$\mathbb{R}$ を有理数の集合 $\mathbb{Q}$ におきかえて何が起こるか調べてみよう。$a, b \in \mathbb{Q}$ に対して、“閉区間” $[a,b]'$ を $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ とし、同様に、“開区間” $(a,b)'$ を $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ とおく。すると、そのような “開区間” よりなる族 $\mathcal{G}$ で $[0,1]'$ を覆い、どのような有限個をとっても、$[0,1]'$ を覆いきれないものが存在する。

例 9.4 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ でおきかえるとき、定理 9.2 の証明が成り立たなくなるばかりでなく、定理そのものが成り立たなくなる。連続関数 $f:[0,1]' \to \mathbb{Q}$ で有界でないものがある。

次の定理は Heine-Borel の定理の簡単な一般化である。

定理 9.5 $[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の閉区間とし、$\mathcal{H}$ を開集合の族で $[a,b]$ を覆っているものとする。すると $\mathcal{H}$ に属する有限個の開集合だけで $[a,b]$ を覆うことができる。

n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ では、定理 9.5 の結論をコンパクト性の定義とする。すなわち

定義　M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。M が**コンパクト**であるとは、M を覆う任意の開集合族に対し、そのうちの有限個だけで M を覆うことができるとき。

この定義によって定理 9.5 をいいかえると

定理 9.5′　$\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ はコンパクト。

$\mathbb{R}$ の部分集合 M が**有界**であるとは、ある閉区間 $[a,b]$ に含まれるときである。(そのとき M は $[-k,k]$ の形の閉区間に含まれ、各元 $x \in M$ に対して $|x| \leqq k$ が成り立つ。逆はあきらかである。) 定理 9.5′ は次のように一般化される。

定理 9.6 $\mathbb{R}$ の中の有界閉集合はコンパクトである。

定理 9.7 $\mathbb{R}$ の中のコンパクト集合は有界である。

定理 9.8 $\mathbb{R}$ の中のコンパクト集合は閉集合である。

だいたい同じ議論により、区間縮小法も一般化される。

定理 9.9 $M_1, M_2, \ldots$ を $\mathbb{R}$ の空でない閉集合の列で、(1) M_1 は有界、(2) 各 i に対して $M_{i+1} \subset M_i$ を満たすものとする。そのとき

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i \neq \emptyset$$

である。

$\mathbb{R}^n$ における**閉区間**とは次の形の集合である。

$$J = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_i \leqq x_i \leqq b_i, 1 \leqq i \leqq n\}$$

ここで、各 i に対して a_i および b_i は $a_i < b_i$ を満たす定数とする。同様に、**開区間**も定義する。

定理 9.10 $J_1, J_2, \ldots$ を $\mathbb{R}^n$ の閉区間の縮小列とすると

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i \neq \emptyset$$

定理 9.11 (Heine-Borel **の定理**) J を $\mathbb{R}^n$ の閉区間とし、$\mathcal{G}$ を開区間の族で J を覆うものとする。するとそのうち有限個のものだけで J を覆うことができる。

定理 9.12 $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクト。

定理 9.13 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合は有界。

定理 9.14 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合は閉。

定理 9.15 $\mathbb{R}^n$ の中の有限個のコンパクト集合の合併集合もコンパクトである。

定理 9.16 $M_1, M_2, \ldots$ を $\mathbb{R}^n$ の空でない閉集合の列で、(1) M_1 は有界、(2) 各 i に対して $M_{i+1} \subset M_i$ を満たすものとする。そのとき

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i \neq \emptyset$$

である。

定理 9.17 (Bolzano-Weierstrass **の定理**) $\mathbb{R}^n$ において、有界な無限集合は集積点をもつ。

定理 9.18 M を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合、$f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると、f は有界。

定理 9.19 M を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合、$f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると、f は最大値と最小値をもつ。

定理 9.20 M を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合、$f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると、f は一様連続である。

例 9.21 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X から $\mathbb{R}^m$ への連続写像 f に関して

(i) X が有界でも、$f(X)$ は有界とは限らない。

(ii) X が閉集合でも、$f(X)$ は閉集合とは限らない。

しかし、両方共に仮定すると

定理 9.22 同じ仮定の下に、X がコンパクトならば、$f(X)$ もコンパクトである。

定理 9.23 X を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とする。X の可算個の閉集合 C_n で、各 C_n は X の開集合を含まないものとすると、$X - \bigcup_n C_n \neq \emptyset$ である。

証明 C_n は X の開集合を含まないことから、C_n の任意の点 p_n の任意の近傍 $N(p_n, \varepsilon_n)$ は $X - C_n$ の点 q_n を含むことがわかる。$X - \bigcup_n C_n$ の点 x を求めよう。

まず、p_1, ε_1 を任意に選び、$N(p_1, \varepsilon_1) \cap (X - C_1)$ の点 q_1 を任意に選ぶ。$q_1 \notin \bigcup_n C_n$ ならば、$x = q_1$ は求める点である。

そうでないときは、q_1 の近傍 $N(q_1, \delta_1)$ を、$\overline{N(q_1, \delta_1)} \subset N(p_1, \varepsilon_1) - C_1$ となるように選ぶ。$N(q_1, \delta_1)$ と最初に交わる C_n を C_{n_1} とおく。$n_1 > 1$ である。$N(q_1, \delta_1)$ は $X - C_{n_1}$ の点 q_2 を含む。$q_2 \notin \bigcup_n C_n$ ならば、$x = q_2$ は求める点である。

そうでないときは、上の議論を繰り返す。すなわち、q_2 の近傍 $N(q_2, \delta_2)$ を、$\overline{N(q_2, \delta_2)} \subset N(q_1, \delta_1) - C_{n_1}$ となるように選ぶ。$N(q_2, \delta_2)$ と最初に交わる C_n を C_{n_2} とおく。$n_2 > n_1$ である。$N(q_2, \delta_2)$ は $X - C_{n_2}$ の点 q_3 を含む。$q_3 \notin \bigcup_n C_n$ ならば、$x = q_3$ は求める点である。

この議論を繰り返すとき、いずれかの段階で、$q_N \notin \bigcup_n C_n$ となれば、$x = q_N$ は求める点である。そうでないとすると、減少列

$$\overline{N(q_1, \delta_1)} \supset \overline{N(q_2, \delta_1)} \supset \overline{N(q_3, \delta_3)} \supset \dots$$

が得られる。コンパクト性より、これらの共通部分は$\emptyset$でない。$x \in \bigcap_n \overline{N(q_1, \delta_1)}$ とすれば、x は求めるものである。■

p をコンパクト集合 X の孤立点とすると、$\{p\}$ は X の開集合である。したがって

定理 9.24 コンパクトな完全集合は非可算である。

● Cantor **集合**

次のような方法で定義される閉区間 $[0, 1]$ の部分集合 C を考えてみよう。

(i) $C_0 = [0, 1]$

(ii) C_i が既に与えられ、たがいに交わらない 2^i 個の閉区間の合併になっているものとする。その各閉区間 $[a, d]$ に対し、b と c を

$$a < b < \frac{a+d}{2} < c < d$$

となるように選ぶ。C_i において、各 $[a, d]$ を $[a, b] \cup [c, d] = [a, d] - (b, c)$ で置き換えたものを C_{i+1} とおく。

すると C_{i+1} はたがいに交わらない 2^{i+1} 個の閉区間の合併である。そこで

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

とおき、これを **Cantor 集合**とよぶ。

例 9.25 古典的な例は"中 3 分の 1"Cantor 集合 $C^{(3)}$ である。それは (b,c) として、つねに、$[a,d]$ のまん中の 3 分の 1 の開区間を選んで得られるものである。すなわち b,c は $[a,d]$ の 3 等分点である。"中 3 分の 1"Cantor 集合は **3 進集合** (ternary set) ともよばれる。ここで、除く区間の長さの和を考えると

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\cdots=1$$

である。何も残らないかというと、そうでない。

定理 9.26 $t\in[0,1]$ を 3 進小数展開する。

$$t=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots \quad (a_n=0,1,2)$$

そのとき、t が 3 進集合に含まれる必要十分条件は、すべての n に対し、$a_n\neq 1$ であること。

定理 9.27 さらに、$t\in C^{(3)}$ に対して

$$f(t)=\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n+1}}+\cdots$$

と定めると、$f(t)\in[0,1]$ で、f は $C^{(3)}$ から $[0,1]$ の上への連続写像である。さらに、$t<t'$ ならば $f(t)\leqq f(t')$ である。

一般の Cantor 集合 C に対して、次の定理が成り立つ。

定理 9.28 S を 0 と 1 からなる無限列全体の集合とすると、S と C の間には $1:1$ 対応が存在する。

証明 $x\in C$ とする。各 i に対して $x\in C_i$ である。x を含む C_{i-1} の小区間は、C_i の小区間を 2 つ含むが、そのとき、x が右側の小区間にあるとき $s_i=1$、左側の小区間にあるとき $s_i=0$ とおく。これにより、$x\in C$ に対して、$\varphi(x)=(s_1,s_2,s_3,\ldots)\in S$ を定めることができる。φ は C から S への全単射を与えている。なぜなら、$\ldots$

定理 9.29 任意の 2 点 $s,t\in C$ に対して、同相写像 $h:C\to C$ で $h(s)=t$ を満たすものが存在する。

定理 9.30 S 上に距離関数 d を、$s=(s_1,s_2,\ldots),\ t=(t_1,t_2,\ldots)$ に対して

$$d(s,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}$$

とおくと、$[S,d]$ は距離空間である。

定理 9.31 上の $\varphi:C\to S$ は同相写像である。

問題

9.32 (i) 開区間 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を端点が有理数の開区間の合併で表せ。

(ii) 開区間 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を端点が有理数の閉区間の合併で表せ。

9.33 (i) 開正方形 $\{(x,y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ を開円板の合併で表せ。

(ii) 開円板 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ を開正方形の合併で表せ。

9.34 閉区間 $[0,1]$ の閉区間による被覆で、有限部分被覆をもたないような例を構成せよ。

9.35 単位閉円板の閉円板による被覆で、有限部分被覆をもたないような例を構成せよ。

9.36 (i) $A \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、$x \in A$ とする。$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ を A の点列とする。このとき、$\{x_1, x_2 \dots\}$ の任意の収束する部分列が x に収束するならば、$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ は x に収束する。

(ii) A がコンパクトでないとき、(i) は成立しないことがある。反例をあげよ。

9.37 $M \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合、$f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次を満たす $M > 0$ が存在する。

$$|f(x) - f(y)| \leqq M\|x - y\| + \varepsilon$$

9.38 M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合で、その上の任意の連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ は有界であるとすると、M はコンパクトである。

9.39 $x_n \in \mathbb{R}$ が x_0 に収束するとき、$C = \{x_0, x_1, x_2 \dots\}$ はコンパクトである。

9.40 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とし、$M_1, M_2, \dots$ を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合の列で、各 i に対して $M_{i+1} \subset M_i$ を満たすものとする。そのとき

$$f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f(M_i)$$

である。

9.41 連続写像 $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に一様収束し、$K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とするとき、$C = f(K) \cup \bigcup_n f_n(K)$ はコンパクトである。

9.42 閉集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し、$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n; \|y - x\| = r\}$ は閉集合である。

9.43 有界閉区間 $[a, b]$ が開区間の集まり $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}$ で覆われているとする。そのとき、十分小さい $\delta > 0$ を選べば、任意の $x \in [a, b]$ に対して、$(x - \delta, x + \delta) \subset (a_\lambda, b_\lambda)$ となる λ が存在するようにできる。

9.44 M を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合、$\{B_j\}$ を ε 近傍による M の開被覆とする。ただし、ε は j ごとに変わるものとする。そのとき、十分小さな $\delta > 0$ を選べば、M の任意の点の δ 近傍に対し、それを含むような B_j が存在するようにできる。

9.45 $\{U_1, U_2, \dots\}$ を $\mathbb{R}^n$ の開被覆とするとき、各 j に対し、$V_j \subset U_j$ となる開被覆 $\{V_1, V_2, \dots\}$ で、すべてのコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し、K と交わる V_j は有限個だけであるようなものが存在する。

次の命題の成否を調べよ。

9.46 $X = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ はコンパクトである。

9.47 $Y = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \,\middle|\, (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$ はコンパクトである。

9.48 $Z = \displaystyle\bigcup_{n-1}^{\infty} \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left(x - 1 - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$ はコンパクトである。

9.49 これらの空間 X, Y, Z と定理 **9.23** は矛盾するように見えるが、そうでない。説明せよ。

以下の問題では、C は一般の Cantor 集合を表すものとする。

9.50 C はコンパクトである。

9.51 C は完全集合である。すなわち、C の各点は C の集積点である。

9.52 C の各点は、ある i に対して、C_i から C_{i+1} を得るとき除いた開区間 (b, c) の端点である。

9.53 C は非可算である。

9.54 $C \sim C \times C$

9.55 C は区間を含まない。

9.56 T を S の部分集合で、ある番号から先はすべて同じ数字となるものの全体とする。すなわち、$x_1, x_2, \ldots$ が T に属するのは、ある N に対して、$i \geqq N$ ならば $x_i = x_{i+1}$ となるときである。そのとき、T は可算である。φ^{-1} により、T は C のどのような点に対応するか。

K を $\mathbb{R}$ のコンパクト集合とする。$\mathcal{G} = \{(a_i, b_i)\}$ を有限個の開区間の族で、K を覆うものとする。そのような $\mathcal{G}$ に対し

$$L(\mathcal{G}) = \sum_i (b_i - a_i)$$

とおき、さらに

$$m(K) = \inf L(\mathcal{G})$$

とおく。$m(K)$ を K の**測度**と呼び、$m(K) = 0$ のとき K を**零集合**と呼ぶ。

9.57 定理 $m([a,b]) = b - a$

9.58 定理 3 進集合は零集合。

9.59 定理 $0 \leqq \alpha < 1$ に対して、$m(C) = \alpha$ となる Cantor 集合がある。

9.60 閉区間 $[0,1]$ に含まれる有理数の全体に番号を付け、$\{r_i \mid i = 1,2,3,\ldots\}$ とする。各 i に対し、r_i を中心とする長さ $\dfrac{1}{2^i}$ の開区間 I_i を

$$I_i = \left(r_i - \frac{1}{2^{i+1}}, r_i + \frac{1}{2^{i+1}} \right)$$

とおく。このとき、開集合族 $\{I_i \mid i = 1,2,3,\ldots\}$ は $[0,1]$ を被覆しないことを示せ。

10　$\mathbb{R}^n$ における連結性

定義　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A, B が**分離される**とは、次を満たすとき

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \text{かつ} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset$$

例 10.1 $\mathbb{R}$ の部分集合を

$$A = (0,1), \quad B = (1,2), \quad C = [2,3)$$

とするとき、A と B は分離され、B と C は分離されない。(明らかであろう。)

例 10.2 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \{(0,y) \mid -1 \leqq y \leqq 1\}, \quad B = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| \, 0 < x \leqq 1 \right\}$$

は分離されない。

定義　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が**不連結**であるとは、$\mathbb{R}^n$ の開集合 G, H で

$$X \cap G \neq \emptyset, \quad X \cap H \neq \emptyset$$

$$(X \cap G) \cup (X \cap H) = X$$

$$(X \cap G) \cap (X \cap H) = \emptyset$$

となるものが存在するとき。不連結でないとき、**連結**であるという。

例 10.3　(i) 2 点集合 $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$ は不連結である。

(ii) 例 **10.1** において、$A \cup B$ は不連結である。

(iii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は不連結である。

(iv) Cantor 集合 C は不連結である。

定理 10.4 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が連結である必要十分条件は、$\emptyset$ でない 2 つの分離される集合の和にならないことである。

定理 10.5 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ が連結で、分離されないならば、$A \cup B$ は連結である。

定理 10.6 $X \subset \mathbb{R}^n$ が不連結である必要十分条件は、X から 2 点集合 $\{0,1\}$ への連続な全射が存在することである。

証明　上の定義の条件を満たす G, H が存在するとき

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in X \cap G \text{ のとき} \\ 1 & x \in X \cap H \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば、...

定理 10.7 $X \subset \mathbb{R}^n$ が不連結である必要十分条件は、X の自明でない部分集合 A で閉かつ開のものが存在することである。

微分積分学で学んだ中間値の定理は区間が連結であることを示している。

定理 10.8 (中間値の定理) 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f が

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \quad \alpha < \gamma < \beta$$

とすると、ある $a < c < b$ に対して

$$f(c) = \gamma$$

である。

定理 10.9 (定理 10.8 の系) 数直線 $\mathbb{R}$ は連結である。

定理 10.10 $X \subset \mathbb{R}^n$ を連結集合、$f : X \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とすると、$f(X) \subset \mathbb{R}^m$ も連結である。

定理 10.11 $X \subset \mathbb{R}^n$ を連結集合、Y を $X \subset Y \subset \overline{X}$ なる部分集合とすると、Y も連結である。

定理 10.12 $\{A_\lambda\}$ を $\mathbb{R}^n$ の連結集合の族とし、どの 2 つも分離されないとする。そのとき、$\bigcup_\lambda A_\lambda$ も連結である。

定理 10.13 $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ を連結とし、$\{A_\lambda\}$ を $\mathbb{R}^n$ の連結集合の族とする。さらに、どの A_λ も A_0 とは分離されないとする。そのとき、$A_0 \cup (\bigcup_\lambda A_\lambda)$ も連結である。

例 10.14 $\mathbb{R}^2$ は連結である。$\mathbb{R}^n$ も連結である。

例 10.15 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ は連結である。$n \geqq 2$ に対して、$\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ も連結である。

例 10.16 $n \geqq 1$ に対して、n 次元球面

$$S^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\right\}$$

は連結である。

定義　部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して、X に含まれる連結集合のうち、極大なものを X の**連結成分**という。

定理 10.17 X の各点 x に対し、x を含む X の連結成分が存在する。

証明　x を含み、X に含まれる連結集合すべての合併集合を考える。...

定理 10.18 X の相異なる連結成分は交わらない。

定理 **10.17** と定理 **10.18** の結果、X はその連結成分により分割される。すなわち、X の連結成分を $\{X_\lambda\}$ とすると

$$X = \bigcup_\lambda X_\lambda, \quad \lambda \neq \mu \ \Rightarrow \ X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$$

この分割を X の**連結成分への分解**という。

定理 10.19 X の連結成分は X の閉集合である。

定義 X のすべての連結成分が 1 点からなるとき、X を**完全不連結**であるという。

例 10.20 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は完全不連結。

例 10.21 Cantor 集合 $C \subset \mathbb{R}$ も完全不連結。

定理 10.22 ある点を含む連結成分は、その点を含む任意の閉かつ開集合に含まれる。

ある点を含む連結成分とその点を含むすべての閉かつ開集合の共通部分は異なることがある。

例 10.23 $X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \{(0, \pm 1)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \middle| -1 \leqq t \leqq 1 \right\}$$

とおくと、点 $(0,1)$ の連結成分は $\{(0,1)\}$ だが、$(0,1)$ を含む X のすべての閉かつ開集合の共通部分は $\{(0,\pm 1)\}$ である。

コンパクト集合に関してはそのようなことは起こらない。

定理 10.24 $X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトとする。$x \in X$ に対し、その連結成分と x を含む X のすべての閉かつ開集合の共通部分とは一致する。

証明 x を含む閉かつ開集合の全体を $\{Z_\lambda\}$ とおく。集合族 $\{Z_\lambda\}$ は共通部分に関して閉じている。実際、Z_λ と Z_μ を x を含む閉かつ開集合とすると、$Z_\lambda \cap Z_\mu$ もそうである。

$Z_0 = \displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ をその共通部分とする。Z_0 が連結であることを示せばよい。Z_0 が連結でないとして、矛盾を導こう。そのとき、Z_0 は $Z_0 = Z_{01} \cup Z_{02}$, $Z_{01} \cap Z_{02} = \emptyset$ と 2 つの閉集合 Z_{01}, Z_{02} に分かれる。$x \in Z_{01}$ としてよい。これらは X の閉集合であるから、X の開集合によって分離することができる（定理 **3.18**）。$Z_{01} \subset U_1$, $Z_{02} \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である。

ここで、各 λ に対して、$C_\lambda = Z_\lambda - (U_1 \cup U_2)$ は空集合でないことに注意する。実際、$Z_\lambda \subset U_1 \cup U_2$ とすると、Z_λ は 2 つの開集合に分かれる。$Z_\lambda = (Z_\lambda \cap U_1) \cup (Z_\lambda \cap U_2)$ となる。すると $Z_\lambda \cap U_1$ も x を含む閉かつ開集合であるから、また別の Z_μ である。これより、$Z_0 \subset U_1$ となり、矛盾が導かれた。

空でない閉集合の族 $\{C_\lambda\}$ も共通部分に関して閉じている。実際、$C_\lambda \cap C_\mu = (Z_\lambda \cap Z_\mu) - (U_1 \cup U_2)$ である。

そのすべての共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ を考えると

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \right) - (U_1 \cup U_2) = Z_0 - (U_1 \cup U_2) = \emptyset$$

である。ここで、補集合を考えて $V_\lambda = \mathbb{R}^n - C_\lambda$ とおけば、$\{V_\lambda\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆となる。したがって、そのうちの有限個で X を覆うことができる。

$$X \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_N} = \mathbb{R}^n - (C_{\lambda_1} \cap \cdots \cap C_{\lambda_N}) = \mathbb{R}^n - C_{\mu'}$$

$C_{\mu'}$ は空でないから、これは矛盾である。■

問題

10.25 $\mathbb{R}$ の連結集合は区間である。

10.26 $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は完全不連結で、連結成分の個数は非可算である。

10.27 $r \in \mathbb{Q}$ を含む $\mathbb{Q}$ の閉かつ開集合の共通部分は $\{r\}$ である。

10.28 例 **10.2** において、$A \cup B$ は連結。

10.29 例 **10.2** において、$A \cup B$ はコンパクト。

10.30 (i) 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフ $\Gamma(f) = \{(x, f(x))\}$ は連結である。

(ii) 次式で与えられた関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続でないが、そのグラフ $\Gamma(f)$ は連結である。

$$f(t) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{t} & t > 0 \\ 0 & t \leqq 0 \end{cases}$$

10.31 $X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x = \pm \frac{\pi}{2} \right\} \cup \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (x, y) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y = \sec x + n \right\}$$

とおく。点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ を含む、X のすべての閉かつ開集合の共通部分を求めよ。

10.32 $X \subset \mathbb{R}^n$、$A \subset X$ とし、$C \subset X$ を A とも $X - A$ とも交わる連結集合とする。そのとき、C は境界 $\mathrm{Fr}(A)$ とも交わる。

10.33 $X \subset \mathbb{R}^n$ が連結である必要十分条件は、X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ と任意の 2 点 $x, y \in X$ と $\mathcal{U}$ に属する $x \in U_\alpha$, $y \in U_\beta$ に対し、$\mathcal{U}$ の元の有限列 $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$ で

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \alpha_N, \quad U_{\alpha_{i-1}} \cap U_{\alpha_i} \cap X \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N)$$

となるものが存在することである。

10.34 $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ をコンパクト連結集合の減少列とするとき $\bigcap_i C_i$ もコンパクト連結集合である。

定義 $A \subset \mathbb{R}^n$ が**局所連結**であるとは、A の任意の点 x と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、x を含み、x の ε 近傍に含まれる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で、$A \cap U$ が連結になるものが存在するとき。

10.35 例 **10.2** において、$A \cup B$ は局所連結でない。

10.36 $A \subset \mathbb{R}^n$ が局所連結ならば、A の連結成分は A の開集合。

10.37 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は局所連結である。

10.38 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ の連結成分の個数は可算である。

10.39 数直線の開集合 $U \subset \mathbb{R}$ に対し、どの 2 つも交わらない可算個（有限個かもしれない）の開区間 $\{(a_n, b_n)\}$ で、$U = \bigcup\limits_n (a_n, b_n)$ と表すことができる。

定義 閉区間 $[0, 1]$ から $A \subset \mathbb{R}^n$ への連続写像を A の**道**という。

定義 A の任意の 2 点 x, y に対し A の道 $\gamma : [0, 1] \to A$ で、$\gamma(0) = x$ かつ $\gamma(1) = y$ となるものが存在するとき、A は**弧状連結**であるという。

10.40 弧状連結ならば連結。

10.41 例 **10.2** において、$A \cup B$ は弧状連結でない。