

曲線と曲面

『曲面と多様体』(朝倉書店、2001年)より

川崎徹郎

2012 春

第1章 曲線論

この章では、ユークリッド空間に含まれるなめらかに曲がった曲線を扱う。いくつかの基本的な考察と定義のあと、まず、曲線の長さについて、続いて曲線の曲がり方、すなわち、曲率について考える。曲率だけでは曲線の形状に記述に十分でないことがわかる。実はもう1つ、捩率の概念が必要なのであるが、捩率はもう少し大がかりな道具立てと共に導入される。それは、フルネ標構といわれるもので、曲線の各点ごとに接線方向と曲がる方向を指定するものである。その変化率を表すものがフルネ・セレの公式で、捩率はそのときの係数として定義される。続いて、この章の中心の問題である2つの曲線に対して、空間の回転および平行移動でぴたりと重なるかどうかを扱う。この問題はフルネ・セレの公式を微分方程式と考えることにより解決される。しかし、完全な解決ではない。残った問題点の1つは曲率が0のとき、捩率が定義できないことである。そのような点を含むとき、曲率と捩率で曲線を定めることはできない。

1.1 C^r 曲線の定義

1.1.1 いろいろな曲線

定義を確定する前に、どのような曲線があるのか、どのようなものを例として頭に浮かべたいのか、思いつくままにあげてみよう。まず、直線はまっすぐであるが、一般の曲線の中に入れる。もう1つの代表は円である。これらは通常では、平面の中に入っているが、その平面を空間の中に浮かべれば、空間における曲線である。平面に含まれる曲線については、多くの例を知っているであろう。微積分で扱う多くの関数のグラフはなめらかな曲線を与える。また、2次曲線については、高等学校でも学んでいるが、代表的な平面曲線である。

空間で考えるときには、そのような関数を2つ(たとえば $f(t)$ と $g(t)$) 持ってくるのも1つの方法である。2つのグラフの組み合わせ

$$C = \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ f(t) \\ g(t) \end{array} \right) \middle| a < t < b \right\}$$

は典型的な空間曲線である．また，平面曲線に対し，その入っている平面を曲げて空間曲線を作ることできる．たとえば，ある傾きの直線を円柱に巻き付けて得られる曲線は螺旋(らせん)といわれ，これは最も単純な空間曲線である．

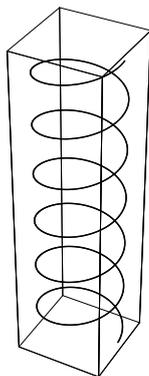


図 1.1: 常螺旋

また，通常，式で与えることはないが，結び目，絡み目，組み紐など興味深い曲線である．

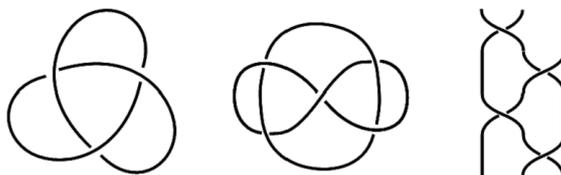


図 1.2: 結び目，絡み目，組み紐

このように，曲線の例をあげていくと際限がなく，何を問題にすべきかとりとめがない．曲線に対する見方を定める必要がある．曲線論では曲線の幾何的な形を問題にする．空間の運動でびたりと重ねることができるとき，同じ形だと思ふことにする．このとき，何に注目したら，形を比べることができるかが本章の問題である．

1.1.2 パラメータ表示

色々な考え方があり得るが，ここでは，点が動くと曲線になる，という考えを採用する． t を，区間(無限区間も含む) (a, b) 上を動くパラメータとし， t

に対応する空間の点 $\boldsymbol{x}(t)$ の集まり C を曲線と考えたい。

$$C = \{\boldsymbol{x}(t) \mid a < t < b\}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

このような表し方を曲線のパラメータ表示という。

例 1 次関数を 3 つ並べると

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

で、これは直線を表す。

例 \sin と \cos を並べると

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$$

で、これは xy 平面上の半径 a の円である。さらに z 座標に 1 関数 bt をつけ加えよう。

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

これは半径 a 傾き $\frac{b}{a}$ の常螺旋といわれる曲線で、傾き $\frac{b}{a}$ の直線を半径 a の円柱に巻きつけて得られる曲線である。

このように、パラメータ表示は強力で、すべての曲線を表すことができそうである（実際そうである。）しかしパラメータ表示されるものがすべて曲線であるかという点、少し問題がある。たとえば、ペアノ曲線とよばれるものがある、それは 2 次元正方形を表すパラメータ表示である。

$$\{\boldsymbol{x}(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

この困難は、パラメータ表示のなめらかさを仮定すれば除くことができる。各 $x_i(t)$ は (a, b) 上の関数であるが、なめらかさを要求するために、各 $x_i(t)$ は C^r 関数であると仮定する。しかし、これで表される曲線がなめらかになるかという点、そうではないことがわかる。次の悪い例を考えよう。

例 t^2 と t^3 を並べると

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

となる．これは平面上をなめらかに動く点の軌跡である． $x = t^2$ は $x \geq 0$ の範囲を動き， $y = t^3$ は $-\infty$ から ∞ までを動く． y と x の関係は $y^2 = x^3$ すなわち， $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$ である．特に $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x}$ で， $x = 0$ のとき $y' = 0$ すなわち，原点で x 軸に接し， $x \geq 0$ の範囲だけを動く．その結果，図のような曲線を描き，明らかにとがった（尖った）点がある．このような点を尖点 (cusp) という．

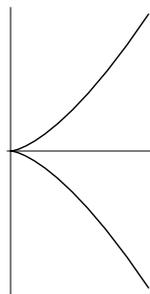


図 1.3: 尖点

この現象を調べるために動く点の速度ベクトルを考えよう．それは

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} (x_1(t+h) - x_1(t)) \\ \frac{1}{h} (x_2(t+h) - x_2(t)) \\ \frac{1}{h} (x_3(t+h) - x_3(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}$$

で与えられる．

速度ベクトルを正規化したものを方向ベクトルという． $\mathbf{e}_1(t)$ で表す．

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (1.2)$$

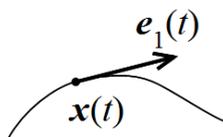


図 1.4: 方向ベクトル

$\mathbf{e}_1(t)$ は曲線が進む向きを表し，なめらかに変化する曲線ならば，この向き $\mathbf{e}_1(t)$ の変化もなめらかであると期待される．しかし，上の例では $t = 0$ をは

さんで x 軸の負の方向 $-e_1$ から正の方向 e_1 に一瞬のうちに変わってしまう。このようなことが起こるのは、 $t = 0$ で、速度ベクトルが 0 になり、方向ベクトルが定義できないからである。そこでなめらかな曲線の定義を次のようにする。

定義 (C^r 曲線) \mathbb{R}^3 の部分集合 C が C^r 曲線であるとは、 C^r 関数によりパラメータ表示され

$$C = \{\mathbf{x}(t) \mid a < t < b\}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

しかも、各 t に対し、速度ベクトルが 0 でないものとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

1.1.3 弧長パラメータ

1 つの C^r 曲線に対して、そのパラメータの選び方はいろいろある。たとえば、直線

$$l = \{t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

について、 0 でない実数 λ に対し、 \mathbf{a} を $\lambda\mathbf{a}$ に代えてもいいし、また、 \mathbf{b} を $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ に代えても、表される直線は変わらない。さらに、 t に $\tan \tau$ を代入し、 τ をパラメータにしても同じ直線を表している。

$$l = \left\{ \tan \tau \mathbf{a} + \mathbf{b} \mid -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2} \right\}$$

曲線自身だけから定まる標準的なパラメータがあると便利なが多い。単位円の場合

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

は角度 t をパラメータとしているが、角度の単位はラジアンで、それは円周の弧の長さである。一般の C^r 曲線に対しても、曲線弧の長さをパラメータにすることができる。

曲線 $C = \{\mathbf{x}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ の長さ $l(C)$ は、一般に次のように定義される。区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b, \quad |\Delta| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$$

に対し、対応する曲線上の点を

$$P_0 = \mathbf{x}(t_0), P_1 = \mathbf{x}(t_1), \dots, P_N = \mathbf{x}(t_N)$$

とし、折れ線 $P_0P_1\dots P_N$ の長さを $l(C; \Delta)$ とおく。

$$l(C; \Delta) = \sum_{i=1}^N \|P_i - P_{i-1}\|$$

極限

$$l(C) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l(C; \Delta)$$

が存在すれば、それを曲線の長さとする。



図 1.5: 曲線の長さ

定理 (復習) $r \geq 1$ のとき、 C^r 曲線 $C = \{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$ には長さが定まり

$$l(C) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$$

で与えられる。

証明 $[a, b]$ の分割 Δ に対して、折れ線の長さは

$$\begin{aligned} l(C; \Delta) &= \sum_i \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_i \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + (x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}))^2 + (x_3(t_i) - x_3(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

と表される。ここで平均値の定理より、 $t'_i, t''_i, t'''_i \in (t_{i-1}, t_i)$ で

$$\begin{aligned} x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}) &= \dot{x}_1(t'_i)(t_i - t_{i-1}) \\ x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}) &= \dot{x}_2(t''_i)(t_i - t_{i-1}) \\ x_3(t_i) - x_3(t_{i-1}) &= \dot{x}_3(t'''_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

となるものがある。したがって

$$\text{“前式”} = \sum_i \sqrt{\dot{x}_1(t'_i)^2 + \dot{x}_2(t''_i)^2 + \dot{x}_3(t'''_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

である。今、 $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)$ は連続であり、したがって、閉区間 $[a, b]$ 上一様連続であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分小さい δ をとると、 $|\Delta| < \delta$ ならば、すべての i について

$$\tau_i \in [t_{i-1}, t_i] \text{ ならば } \begin{cases} |\dot{x}_1(t'_i) - \dot{x}_1(\tau_i)| < \varepsilon \\ |\dot{x}_2(t''_i) - \dot{x}_2(\tau_i)| < \varepsilon \\ |\dot{x}_3(t'''_i) - \dot{x}_3(\tau_i)| < \varepsilon \end{cases}$$

が成り立つ．さらに $|\Delta|$ が小さいとき，すべての i について

$$\left| \sqrt{\dot{x}_1(t'_i)^2 + \dot{x}_2(t''_i)^2 + \dot{x}_3(t'''_i)^2} - \|\dot{\mathbf{x}}(\tau_i)\| \right| < \varepsilon$$

が成り立つ．そのとき

$$\left| l(C; \Delta) - \sum_i \|\dot{\mathbf{x}}(\tau_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon \sum_i (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

で，左辺第 2 項は積分 $\int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$ に収束する．

$r \geq 1$ のとき， C^r 曲線 $\{\mathbf{x}(t)\}$ に対し，

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt \quad (1.3)$$

とおく． $s(t)$ は $t > t_0$ に対し t_0 から t までの曲線の長さを与えている． $s(t)$ は t の単調増大関数で

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| > 0$$

である．ここで， $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$ は t の C^{r-1} 関数であるから， $s(t)$ は t の C^r 関数である．

逆関数定理より， t は s の C^r 関数でもあるので

$$t = t(s), \quad \frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t(s))\|}$$

と表せる．そこで，曲線 $\mathbf{x}(t)$ の t に $t(s)$ を代入して，新たなパラメータ表示 $\mathbf{x}(t(s))$ を得る．この表示を弧長パラメータ表示， s を弧長パラメータという．通常，これを $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t(s))$ と記す．誤解のないように， s は常に弧長パラメータを表し，一般のパラメータは t で表すようにする．また， s による微分は $\mathbf{x}'(s)$ で表し， t による微分は $\dot{\mathbf{x}}(t)$ で表す．

$$\|\mathbf{x}'(s)\| = \left\| \frac{d\mathbf{x}(t(s))}{ds} \right\| = \left\| \dot{\mathbf{x}}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) \right\| \equiv 1$$

が成り立つ．

これから曲線の理論を展開するとき，弧長パラメータは議論を簡単にするのに大いに役立つ．しかし，計算を具体的な曲線に対して行うときは，弧長パラメータの計算は実際的には実行不可能のことが多い．そのため，以後，パラメータ t と弧長パラメータ s を，できるかぎり両方用いるようにする．

1.2 曲率，捩率，フルネ・セレの公式

1.2.1 曲率

C^r 曲線 $C = \{\mathbf{x}(t)\}$ の単位長さあたりの曲がり方を考えよう．曲線の方向ベクトル $\mathbf{e}_1(t)$ は (1.2) に定めたとおりである．ここで， $\mathbf{e}_1(t)$ は t の関数として C^{r-1} であることに注意する．曲線の曲がり方，すなわち曲率は方向ベクトルの変化率で表されるであろう．しかし，パラメータに関して微分すると，その値はパラメータの取り方で変わってしまう．パラメータの取り方によらずに定まるようにするには，曲線の長さあたりの変化率を考えるのが自然である．そのためには， $\mathbf{e}_1(t)$ が少なくとも C^1 であること，すなわち， $r \geq 2$ が必要である．そのとき

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_1(t+h) - \mathbf{e}_1(t)}{\|\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)\|} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} (\mathbf{e}_1(t+h) - \mathbf{e}_1(t))}{\left\| \frac{1}{h} (\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)) \right\|} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{e}}_1(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\dot{\mathbf{e}}_1(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \quad (1.4)$$

とおき， $\mathbf{k}(t)$ を曲率ベクトル (curvature vector) という．曲率ベクトルの大きさを曲率 (curvature) といい， $\kappa(t)$ で表す．

$$\kappa(t) = \|\mathbf{k}(t)\| = \frac{\|\dot{\mathbf{e}}_1(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \quad (1.5)$$

弧長パラメータを用いて表すと

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{e}'_1(s) = \mathbf{x}''(s), \quad \kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$$

となる． $\mathbf{e}_1(t)$ を微分するとき，その始点は原点であると考えている．すると， $\mathbf{e}_1(t)$ を単位球面上の曲線と考えることができ， $\mathbf{k}(t)$ はその変化率である．したがって， $\mathbf{k}(t)$ は $\mathbf{e}_1(t)$ と直交することが期待できる．実際，内積の微分の公式

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = (\dot{\mathbf{f}}(t), \mathbf{g}(t)) + (\mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{g}}(t))$$

を用いて， $(\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_1(t)) \equiv 1$ の両辺を t で微分すると，次式が得られる．

$$0 \equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_1(t)) = 2(\dot{\mathbf{e}}_1(t), \mathbf{e}_1(t))$$

よって， $\mathbf{k}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \dot{\mathbf{e}}_1(t)$ は $\mathbf{e}_1(t)$ と直交する．

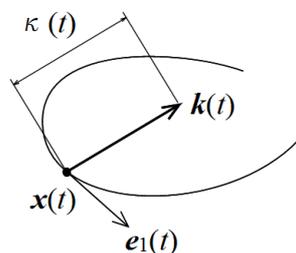


図 1.6: 曲率ベクトルと曲率

例 (直線 (straight line)) 直線のパラメータ表示より

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} ta_1 + b_1 \\ ta_2 + b_2 \\ ta_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

である．よって

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

を得る．これは t によらない定ベクトルである．したがって，曲率ベクトル $\mathbf{k}(t) \equiv \mathbf{0}$ で，曲率 $\kappa(t) \equiv 0$ である．要するに，直線は曲がっていないわけである．

例 (円 (circle)) 円のパラメータ表示より

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = a$$

である．よって

$$\mathbf{e}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

で，これは単位球面 S^2 の赤道上进行する．したがって

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\dot{\mathbf{e}}_1(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa(t) = \|\mathbf{k}(t)\| = \frac{1}{a}$$

となり，曲率は半径の逆数になる．一般に，曲率の逆数を曲率半径という．

例 (螺旋 (ordinary helix)) 螺旋の場合は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

である．よって

$$\boldsymbol{e}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}$$

で，これは単位球面 S^2 のある緯線上を動く．したがって

$$\boldsymbol{k}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{e}}_1(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = \frac{a}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(t) = \|\boldsymbol{k}(t)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

となり，曲率半径は $a + \frac{b^2}{a}$ である．同じ半径のバネでも延ばせば曲率は減る（曲率半径は大きくなる）のである．

曲率，曲率ベクトルを直接 $\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), \ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ で表してみよう．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}(t) &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \dot{\boldsymbol{e}}_1(t) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \right) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \right) \dot{\boldsymbol{x}}(t) + \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \ddot{\boldsymbol{x}}(t) \right\} \end{aligned}$$

であり，ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \right) &= \frac{d}{dt} (\dot{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dt} (\dot{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) \\ &= -\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}(t), \ddot{\boldsymbol{x}}(t))}{(\dot{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \end{aligned}$$

である．したがって

$$\boldsymbol{k}(t) = \frac{1}{(\dot{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))} \ddot{\boldsymbol{x}}(t) - \frac{(\dot{\boldsymbol{x}}(t), \ddot{\boldsymbol{x}}(t))}{(\dot{\boldsymbol{x}}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))^2} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{1}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})} \ddot{\boldsymbol{x}} - \frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})^2} \dot{\boldsymbol{x}}$$

である．また

$$\begin{aligned}\kappa(t)^2 &= \left(\frac{1}{(\dot{x}, \dot{x})} \ddot{x} - \frac{(\dot{x}, \ddot{x})}{(\dot{x}, \dot{x})^2} \dot{x}, \frac{1}{(\dot{x}, \dot{x})} \ddot{x} - \frac{(\dot{x}, \ddot{x})}{(\dot{x}, \dot{x})^2} \dot{x} \right) \\ &= \frac{(\ddot{x}, \ddot{x})}{(\dot{x}, \dot{x})^2} - 2 \frac{(\dot{x}, \ddot{x})(\dot{x}, \ddot{x})}{(\dot{x}, \dot{x})^3} + \frac{(\dot{x}, \ddot{x})^2 (\dot{x}, \dot{x})}{(\dot{x}, \dot{x})^4} \\ &= \frac{(\dot{x}, \dot{x})(\ddot{x}, \ddot{x}) - (\dot{x}, \ddot{x})^2}{(\dot{x}, \dot{x})^3}\end{aligned}$$

が成り立つ．まとめて，次式が得られる．

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{(\dot{x}, \dot{x})} \ddot{x} - \frac{(\dot{x}, \ddot{x})}{(\dot{x}, \dot{x})^2} \dot{x} \quad (1.6)$$

$$\kappa(t) = \sqrt{\frac{(\dot{x}, \dot{x})(\ddot{x}, \ddot{x}) - (\dot{x}, \ddot{x})^2}{(\dot{x}, \dot{x})^3}} \quad (1.7)$$

1.2.2 撥率とフルネ・セレの公式

半径 a の円の曲率は一定で $\frac{1}{a}$ である．半径 a 勾配 $\frac{b}{a}$ の常螺旋の曲率も一定で $\frac{a}{a^2 + b^2}$ である．これは半径 $a + \frac{a}{b^2}$ の円の曲率と全く同じである．この2つの曲線は明らかに形状が違う．何が違うのだろうか．

クジラは泳ぐとき，尾ビレで推進力を得て，胸ビレで方向を定める．水中で円運動をするときは，曲がる方向に背中を向け胸ビレに少し仰角をつければよい．では螺旋運動をするときはどのように胸ビレを動かせばいいのだろうか．左右の仰角に差をつければいいのだろうか．そのとき，どのような軌跡を描くであろうか．

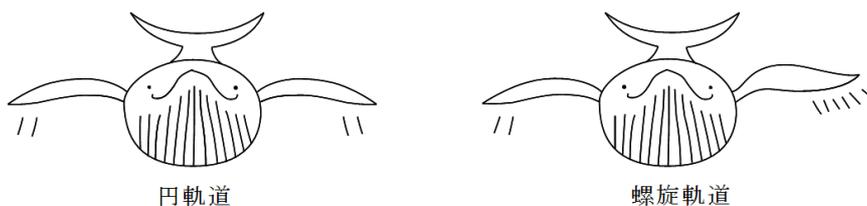


図 1.7: 円軌道を泳ぐクジラと螺旋軌道を泳ぐクジラ

このようなことを調べるには曲がる方向の変化率を調べる必要がある． C^r 曲線 $C = \{\mathbf{x}(t)\}$ を考える．その各点での曲がる方向 $\mathbf{e}_2(t)$ は曲率ベクトルの方向であるから

$$\mathbf{e}_2(t) = \frac{\mathbf{k}(t)}{\|\mathbf{k}(t)\|} = \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{k}(t) \quad (1.8)$$

である． $e_2(t)$ を主法線ベクトル (principal normal) という． $k(t)$ は t の C^{r-2} 関数であるから， $e_2(t)$ も C^{r-2} である． $k(t) = 0$ のときには $e_2(t)$ は定義されない．

$e_1(t), e_2(t)$ は互いに直交する単位ベクトルである．そこで， $\langle e_1(t), e_2(t), e_3(t) \rangle$ が右手系の正規直交基底になるように $e_3(t)$ を定める． $e_3(t)$ を従法線ベクトル (binormal) という．ベクトルの外積を用いて

$$e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t) \quad (1.9)$$

と表せる．すなわち

$$e_1(t) = \begin{pmatrix} e_{11}(t) \\ e_{21}(t) \\ e_{31}(t) \end{pmatrix}, \quad e_2(t) = \begin{pmatrix} e_{12}(t) \\ e_{22}(t) \\ e_{32}(t) \end{pmatrix}$$

とすると，次が成り立つ．

$$e_3(t) = \begin{pmatrix} e_{11}(t) \\ e_{21}(t) \\ e_{31}(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{12}(t) \\ e_{22}(t) \\ e_{32}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e_{21}(t) & e_{22}(t) \\ e_{31}(t) & e_{32}(t) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} e_{31}(t) & e_{32}(t) \\ e_{11}(t) & e_{12}(t) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

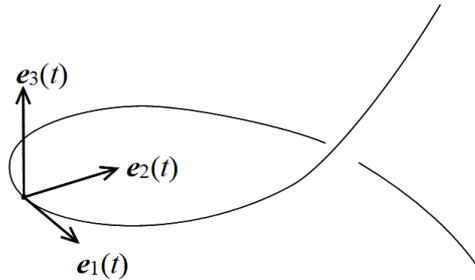


図 1.8: フルネ標構

このようにして得られた正規直交基底 $\langle e_1(t), e_2(t), e_3(t) \rangle$ はフルネ標構 (Frenet frame) または動標構 (moving frame) といわれる．各 t に対して， $e_1(t)$ は曲線の方向， $e_2(t)$ は曲線の曲がる方向， $e_3(t)$ はそれらと直交する方向である．また， $e_1(t)$ は C^{r-1} ， $e_2(t), e_3(t)$ は C^{r-2} である．これらの単位長さあたりの変化率を調べよう．それはまたベクトルであるから， $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$

の1次結合で表される．その係数を調べるのである．しばらくの間，計算の簡単のために弧長パラメータ s を用いて計算する．

$e_1(s)$ の変化率は曲率ベクトルである．

$$e_1'(s) = \mathbf{k}(s) = \kappa(s)e_2(s) \quad (1.10)$$

$e_2(s)$ の変化率を見るために

$$(e_2'(s), e_2(s)) \equiv 1$$

の両辺を微分すると

$$2(e_2'(s), e_2(s)) \equiv 0$$

よって， $e_2'(s)$ の $e_2(s)$ 成分はない．また

$$(e_2(s), e_1(s)) \equiv 0$$

の両辺を微分して，移項すると

$$(e_2'(s), e_1(s)) = -(e_2(s), e_1'(s)) = -(e_2(s), \kappa(s)e_2(s)) = -\kappa(s)$$

したがって， $e_2'(s)$ の $e_1(s)$ 成分は $-\kappa(s)$ である．

今までに得られたことから $e_2'(s)$ の $e_3(s)$ 成分を求めることはできない．あらたな量を導入する． $e_2'(s)$ の $e_3(s)$ 成分を $\tau(s)$ とおく．

$$\tau(s) = (e_2'(s), e_1(s)) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} (\dot{e}(t), e_1(t)) \quad (1.11)$$

$\tau(s)$ は曲線 C の撓率 (れいりつ) (torsion) といわれる．すると

$$e_2'(s) = -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s) \quad (1.12)$$

が成り立つ．パラメータ t で表すと

$$\frac{\dot{e}_2(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = -\kappa(t)e_1(t) + \tau(t)e_3(t)$$

である．ここで，両式の右辺第1項は曲線が曲がるため，必然的に，曲がる方向が曲がる方向に回る分を表し，曲率に比例している．第2項は曲がる方向が，進行方向に対し左回り，または右回りにねじれていく分を表している．それを表す量が撓率である．

$e_3(s)$ の変化率を求めよう．3式

$$(e_3(s), e_1(s)) \equiv 0, \quad (e_3(s), e_2(s)) \equiv 0, \quad (e_3(s), e_3(s)) \equiv 1$$

を微分した式より

$$(e_3'(s), e_1(s)) = -(e_3(s), e_1'(s)) = -(e_3(s), \kappa(s)e_2(s)) \equiv 0$$

$$(e_3'(s), e_2(s)) = -(e_3(s), e_2'(s)) = -(e_3(s), -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s)) \\ = -\tau(s)$$

$$(e_3'(s), e_3(s)) \equiv 0$$

となる．よって

$$e_3'(s) = \frac{\dot{e}_3(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = -\tau(s)e_2(s) \quad (1.13)$$

である．以上をまとめて表すと

$$\begin{cases} e_1'(s) = & \kappa(s)e_2(s) \\ e_2'(s) = -\kappa(s)e_1(s) & +\tau(s)e_3(s) \\ e_3'(s) = & -\tau(s)e_2(s) \end{cases} \quad (1.14)$$

この式をフルネ・セレの公式 (Frenet-Serret's formula) という．パラメータ t で表すと

$$\begin{cases} \frac{\dot{e}_1(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = & \kappa(t)e_2(t) \\ \frac{\dot{e}_2(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = -\kappa(t)e_1(t) & +\tau(t)e_3(t) \\ \frac{\dot{e}_3(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = & -\tau(t)e_2(t) \end{cases}$$

となる．

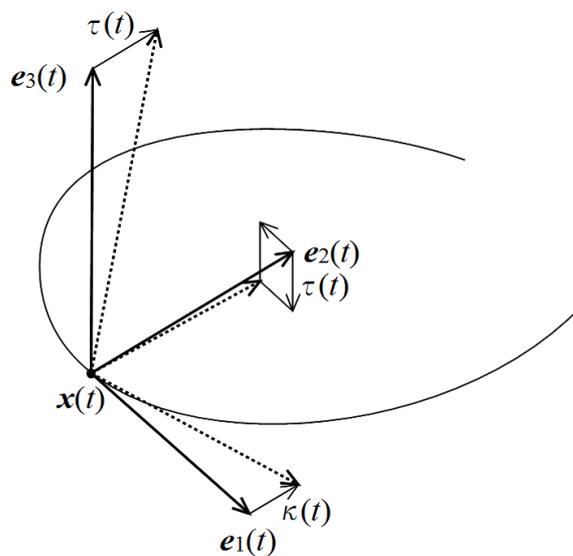


図 1.9: 曲率と捩率

捩率についても，直接 $x(t)$ の導関数で表す式を求めよう．フルネ・セレの

公式より

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} (\dot{\boldsymbol{e}}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} (\boldsymbol{e}_1(t) \times \boldsymbol{e}_2(t), \dot{\boldsymbol{e}}_2(t)) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \det(\boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \dot{\boldsymbol{e}}_2(t))\end{aligned}$$

を得る．ここで，外積と行列式の関係

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

を用いた．さらに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1(t) &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{e}_2(t) &= \frac{1}{\kappa(t)} \boldsymbol{k}(t) = \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})^3}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \left(\frac{1}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})} \ddot{\boldsymbol{x}} - \frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})^2} \dot{\boldsymbol{x}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \ddot{\boldsymbol{x}} + A\dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}}_2(t) &= \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \dot{\ddot{\boldsymbol{x}}} + B\ddot{\boldsymbol{x}} + C\dot{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

と表される．ここで， A, B, C は複雑な式で表される関数であるが，後の計算で必要なくなるのであえて計算しない．これらを代入して

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} \det(\boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \dot{\boldsymbol{e}}_2(t)) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|} \det \left(\frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|} \dot{\boldsymbol{x}}, \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \ddot{\boldsymbol{x}} + A\dot{\boldsymbol{x}}, \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \dot{\ddot{\boldsymbol{x}}} + B\ddot{\boldsymbol{x}} + C\dot{\boldsymbol{x}} \right) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|} \det \left(\frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|} \dot{\boldsymbol{x}}, \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \ddot{\boldsymbol{x}}, \sqrt{\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}} \dot{\ddot{\boldsymbol{x}}} \right) \\ &= \frac{1}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})} \frac{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2} \det(\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}, \dot{\ddot{\boldsymbol{x}}}) \\ &= \frac{\det(\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}, \dot{\ddot{\boldsymbol{x}}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2}\end{aligned}$$

となる．ただし，根号の中身は省略している．結果として，次式が得られた．

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}, \dot{\ddot{\boldsymbol{x}}})}{(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}})(\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}}) - (\dot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{x}})^2} \quad (1.15)$$

例 直線については、曲率 $\equiv 0$ で、撓率は定義できない。円のときは

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}(t) = -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、次を得る。

$$\boldsymbol{e}_2(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、 $\dot{\boldsymbol{e}}_3(t) \equiv \mathbf{0}$ であるから、 $\tau(t) \equiv 0$ である。

一般に曲線 $C = \{\boldsymbol{x}(t)\}$ がある平面 Π に含まれるとき、 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ も Π に含まれ、 $\boldsymbol{e}_1(t)$ もそうである。ゆえに、 $\dot{\boldsymbol{e}}_1(t)$ も Π に含まれ、 $\boldsymbol{e}_2(t)$ もそうである。すなわち、 $\boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t)$ ともに Π に含まれ、したがって、 $\boldsymbol{e}_3(t)$ は Π と直交する。 $\|\boldsymbol{e}_3(t)\| \equiv 1$ であるから、このことは $\boldsymbol{e}_3(t)$ が定ベクトルであることを示している。したがって、この場合、特に、 $\tau(t) \equiv 0$ である。

じつは、この逆も成り立つことが知られている。 $\kappa(t) > 0$ のとき、 $\tau(t) \equiv 0$ ならば、 C はある平面に含まれることがわかる。

例 (常螺旋) この場合は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}(t) = \frac{a}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

であった。したがって

$$\boldsymbol{e}_2(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ a \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_3(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \cos t \\ b \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

となる。常螺旋は曲率、撓率がともに定数であるような曲線である。

例 ここで

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ at^2 \\ bt^3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2at \\ 3bt^2 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 6bt \end{pmatrix}, \quad \dot{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6b \end{pmatrix}$$

で表される曲線を考えよう．この曲線は

- 1) (x, y) 平面に射影すると $\begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix}$ で，放物線 $y = ax^2$ になる．
- 2) (y, z) 平面に射影すると $\begin{pmatrix} at^2 \\ bt^3 \end{pmatrix}$ で，尖点 $z = \pm(\sqrt{y})^3$ になる．
- 3) (x, z) 平面に射影すると $\begin{pmatrix} t \\ bt^3 \end{pmatrix}$ で，3次放物線 $z = bx^3$ になる．

という特徴がある．曲率，捩率は次式で表される．

$$\kappa(t) = 2\sqrt{\frac{a^2 + 9b^2t^2 + 9a^2b^2t^4}{(1 + 4a^2t^2 + 9b^2t^4)^3}}, \quad \tau(t) = \frac{3ab}{a^2 + 9b^2t^2 + 9a^2b^2t^4}$$

特に $t = 0$ のとき， $\kappa(0) = 2a$, $\tau(0) = \frac{3b}{a}$ である．この曲線は $\kappa > 0, \tau > 0$ なる点の近傍での，一般的な曲線の形状を表しているといえる（次項参照）．

1.2.3 曲線の局所的形状

$r \geq 3$ とし， C^r 曲線 $C = \{\mathbf{x}(s)\}$ が与えられたとする． s はその弧長パラメータとする． 0 を定義域に含むとし， $s = 0$ の近くで考える．

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{pmatrix}$$

各成分は C^r 関数であるから， $s = 0$ で3次までテイラー展開できる．

$$x_i(s) = x_i(0) + sx_i'(0) + \frac{s^2}{2}x_i''(0) + \frac{s^3}{3!}x_i'''(0) + o(s^3)$$

ここで， $o(s^3)$ は

$$s \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{|o(s^3)|}{s^3} \rightarrow 0$$

を満たす s の関数である．これらを成分とするベクトルを考えると

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + s\mathbf{x}'(0) + \frac{s^2}{2}\mathbf{x}''(0) + \frac{s^3}{3!}\mathbf{x}'''(0) + \mathbf{o}(s^3)$$

と表される．ここで，フルネ・セレの公式を用いて， s による $\mathbf{x}(s)$ の導関数を計算する．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{x}''(s) &= \mathbf{e}_1'(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{x}'''(s) &= \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) + \kappa(s)\mathbf{e}_2'(s) \\ &= \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)\mathbf{e}_1 + \tau(s)\mathbf{e}_3(s)) \\ &= -\kappa(s)^2\mathbf{e}_1(s) + \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{e}_3(s)\end{aligned}$$

$s = 0$ とし，前々式の $\mathbf{x}'(0)$ 等に代入すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(0) + s\mathbf{e}_1(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)\mathbf{e}_2(0) \\ &\quad + \frac{s^3}{6}\left(-\kappa(0)^2\mathbf{e}_1(0) + \kappa'(0)\mathbf{e}_2(0) + \kappa(0)\tau(0)\mathbf{e}_3(0)\right) + \mathbf{o}(s^3) \\ &= \mathbf{x}(0) + \left(s - \frac{\kappa(0)^2}{6}s^3 + o_1(s^3)\right)\mathbf{e}_1(0) \\ &\quad + \left(\frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3 + o_2(s^3)\right)\mathbf{e}_2(0) \\ &\quad + \left(\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 + o_3(s^3)\right)\mathbf{e}_3(0)\end{aligned}$$

ここで，空間の座標を新たに導入して， $\mathbf{x}(0)$ を新しい原点， $\mathbf{e}_1(0)$ ， $\mathbf{e}_2(0)$ ， $\mathbf{e}_3(0)$ を新しい座標軸とする．そのときの， $\mathbf{x}(s)$ の座標を

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + y_1(s)\mathbf{e}_1(0) + y_2(s)\mathbf{e}_2(0) + y_3(s)\mathbf{e}_3(0)$$

で

$$\begin{cases} y_1(s) = s - \frac{\kappa(0)^2}{6}s^3 + o_1(s^3) \\ y_2(s) = \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3 + o_2(s^3) \\ y_3(s) = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 + o_3(s^3) \end{cases} \quad (1.16)$$

と表される．これをブーケの公式 (Bouquet's formula) という．曲線の標準的な表し方として，フルネ標構を新たな座標系として用いたものである．そのとき，関数 $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$ をテイラー展開するときの，3 次までの項が曲率，捩率および曲率の微分で定まってしまうことがわかる．このように，ブーケの公式はある点の近くでの曲線の形と，曲率，捩率との関係を与えている．

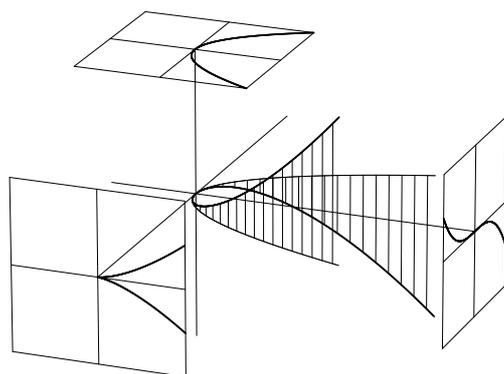


図 1.10: ブーケの公式

一般に，2 つの曲線がある点で r 次の接触をしているとは，弧長パラメータで表すとき，その点で r 階までの微分係数が一致することである．2 次の接触をする必要十分条件はその点で接し，かつ曲率ベクトルが一致することである．したがって， $\kappa > 0$ の各点に対し，その点で 2 次の接触をする円が一意的に定まり，その半径が曲率半径である．

ブーケの公式より次のことが導かれる．3 次の接触をする必要十分条件は，その点でフルネ標構が一致し，曲率，捩率および曲率の微分係数が一致することである．

y_2, y_3 を y_1 の式で表してみよう．公式の第 1 式を逆に解いて

$$s = y_1 + \frac{\kappa(0)^2}{6}y_1^3 + o(y_1^3)$$

これを第 2, 第 3 式に代入すると

$$y_2 = \frac{\kappa(0)}{2}y_1^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}y_1^3 + o_2(y_1^3)$$

$$y_3 = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}y_1^3 + o_3(y_1^3)$$

を得る．はじめの式は曲線 C を y_1y_2 平面に射影するとき，その曲線は放物線と 2 次の接触をし， $\kappa'(0) > 0$ のとき，右側で放物線の内側に，左側で放物線の外側に来ることを示している．曲線 C を y_1y_3 平面に射影するときは 3 次放物線と 3 次の接触をすることがわかる．

また第 2 式を $t = \sqrt{y_2}$ に関して解くと

$$s = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa(0)}} t - \frac{\kappa'(0)}{3\kappa(0)^2} t^2 + o(t^2)$$

これを第 3 式に代入すると

$$y_3 = \pm \frac{\tau(0)}{3} \sqrt{\frac{2}{\kappa(0)}} (\sqrt{y_2})^3 + o(y_2^{3/2})$$

となる．これは C を y_2y_3 平面に射影すると，尖点のような形になることを示している．

1.3 自然方程式

1.3.1 曲線論の基本定理

C^r 曲線 $C = \{x(t)\}$ を，回転と平行移動で動かして得られる曲線を $\tilde{C} = \{\tilde{x}(t)\}$ とおく．すると，回転を表す行列，すなわち，行列式が 1 の直交行列 $A \in SO(3)$ と移動ベクトル b が存在して， $\tilde{x}(t) = Ax(t) + b$ と表すことができる．回転も，平行移動も 2 点間の距離を変えないから，ある変数変換 $t = t(s)$ によって， $x(s)$ が弧長パラメータならば， $\tilde{x}(s)$ も弧長パラメータである．さらに

$$\tilde{x}'(s) = Ax'(s), \quad \tilde{x}''(s) = Ax''(s), \quad \tilde{x}'''(s) = Ax'''(s)$$

が成り立つ．直交行列による変換は内積を変えないという性質がある．また，行列式が 1 の行列による変換は，ベクトルの定める行列式を変えないという性質を持つ．したがって

$$(Ax, Ay) = (x, y), \quad \det(Ax, Ay, Az) = \det(x, y, z)$$

が成り立つ．ここで，曲率，捩率を表す式 (1.7), (1.15) を思い出せば， \tilde{C} の曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ ，捩率 $\tilde{\tau}(s)$ は C と変わらないことがわかる．

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s), \quad \tilde{\tau}(s) = \tau(s)$$

このことは，曲率，捩率の定義から明らかなことでもあるが，あえて，その成り立ちを明らかにした．

この節の主定理の1つはこの逆が成り立つということである。すなわち、弧長パラメータの関数として、曲率、撓率が一致する2つの C^r 曲線は、回転と平行移動でびたりと重ねることができるというものである。このとき、撓率が定義されていなければならないから、 $r \geq 3$ で、さらに、仮定 $\kappa(s) > 0$ が必要である。

さらに、次の問題に答える。任意に C^{r-2} 関数 $\kappa(s) > 0$ と C^{r-3} 関数 $\tau(s)$ を与えるとき、 $\kappa(s)$ を曲率とし、 $\tau(s)$ を撓率とするような C^r 曲線 C は存在するであろうか。答はイエスである。次の定理が成り立つ。

定理 1 (曲線論の基本定理) $r \geq 3$ と $-\infty \leq a < b \leq \infty$ なる a, b に対し、区間 (a, b) 上の正値 C^{r-2} 関数 $\kappa(s) > 0$ と C^{r-3} 関数 $\tau(s)$ が与えられたとすると

- 1) $\kappa(s)$ を曲率、 $\tau(s)$ を撓率とし、 s を弧長パラメータとするような C^r 曲線 $C = \{x(s) \mid a < t < b\}$ が存在する。
- 2) そのような曲線が2つ存在すれば、回転と平行移動で重ね合わせることができる。

定理の証明にはいる前に、いくつかのことを考えてみよう。曲率、撓率は曲線のパラメータ表示の導関数で与えられている。したがって、曲率、撓率から曲線を求めることは、微分方程式の解を求めることである。このように、曲率、撓率を曲線を与える方程式と思うとき、自然方程式 (natural equation) という。

式 (1.7) と (1.15) を $\kappa(t)$ 、 $\tau(t)$ を既知関数、 $x(t)$ を未知関数とする常微分方程式と思えば、これらが自然方程式であり、その解の存在と一意性が上記定理である。しかし、この方程式は形が悪く、そのような解の存在と一意性を示すのは難しそうである。

$x'(s) = e_1(s)$ であるから、 $e_1(s)$ が求めれば、 $x(s)$ は積分定数による平行移動を除いて定まる。 $e_1(s)$ を定めるものは何であろうか。フルネ・セレの公式を常微分方程式と見れば、 $e_2(s)$ が求めれば、 $e_1(s)$ が定まる。しかし、 $e_2(s)$ を定めるには $e_1(s)$ と $e_3(s)$ を定める必要がある。

フルネ・セレの公式を見直そう。それは $e_1(s)$ 、 $e_2(s)$ 、 $e_3(s)$ を並べて得られる9次元ベクトルに関する1階線型常微分方程式系である。実際

$$\tilde{f}(s) = \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix}$$

とおくと、次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{f}}'(s) &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1'(s) \\ \mathbf{e}_2'(s) \\ \mathbf{e}_3'(s) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \kappa(s)\mathbf{e}_2(s) \\ -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s) \\ -\tau(s)\mathbf{e}_2(s) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} O_3 & \kappa(s)I_3 & O_3 \\ -\kappa(s)I_3 & O_3 & \tau(s) \\ O_3 & -\tau(s) & O_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix} \\
 &= \tilde{K}(s)\tilde{\mathbf{f}}(s)
 \end{aligned}$$

よって、9次元関数ベクトル $\tilde{\mathbf{f}}(s)$ は1階線型常微分方程式系

$$\tilde{\mathbf{f}}'(s) = \tilde{K}(s)\tilde{\mathbf{f}}(s) \quad (1.17)$$

を満たす．ただし

$$\tilde{K}(s) = \begin{pmatrix} O_3 & \kappa(s)I_3 & O_3 \\ -\kappa(s)I_3 & O_3 & \tau(s) \\ O_3 & -\tau(s) & O_3 \end{pmatrix}$$

である．

ここで、後の計算の便利のために、9次元ベクトルをただ単に縦に並べるのではなく、3つのベクトルを横に並べた 3×3 行列 $F(s)$ を考えよう．

$$F(s) = (\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s))$$

すると、次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
 F'(s) &= (\mathbf{e}_1'(s), \mathbf{e}_2'(s), \mathbf{e}_3'(s)) \\
 &= (\kappa(s)\mathbf{e}_2(s), -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s), -\tau(s)\mathbf{e}_2(s)) \\
 &= (\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= F(s)K(s)
 \end{aligned}$$

よって、 3×3 関数行列 $F(s)$ は1階線型常微分方程式

$$F'(s) = F(s)K(s) \quad (1.18)$$

を満たす．ただし

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

である．ここで， $K(s)$ は反対称行列であること，すなわち， ${}^tK(s) = -K(s)$ を満たすことに注意する．

方程式 (1.17) と (1.18) はその成分に着目すれば，まったく同じ方程式である．したがって，1 階線型常微分方程式系の理論を方程式 (1.18) に適用すれば，その解について次の結果を得ることができる．

- 1) $K(s)$ は C^{r-3} であるから， $s = s_0$ における任意の初期値 F_0 に対し， C^{r-2} の解 $F(s)$ が区間 (a, b) 上で一意的に存在する．
- 2) I_3 を初期値とする (1.18) の解を特に $\Phi(s)$ とおくと，任意の初期値 F_0 に対し，その解は $F(s) = F_0\Phi(s)$ で与えられる．
- 3) $\Phi(s)$ は行列式が 1 の直交行列である．

1) については常微分方程式の教科書を見てほしい．2) は

$$\begin{aligned} F(s_0) &= F_0\Phi(s_0) = F_0I_3 = F_0 \\ F'(s) &= F_0\Phi'(s) = F_0\Phi(s)K(s) = F(s)K(s) \end{aligned}$$

より明らかである．3) については次の議論ができる．一般に，関数行列の逆行列の微分は $(A(s)^{-1})' = -A(s)^{-1}A'(s)A(s)^{-1}$ で与えられる．これを用いて， $({}^t\Phi(s)^{-1})'$ を計算する．

$$\begin{aligned} ({}^t\Phi(s)^{-1})' &= -{}^t\Phi(s)^{-1}{}^t\Phi'(s){}^t\Phi(s)^{-1} \\ &= -{}^t\Phi(s)^{-1}{}^t(\Phi(s)K(s)){}^t\Phi(s)^{-1} \\ &= -{}^t\Phi(s)^{-1}{}^tK(s){}^t\Phi(s){}^t\Phi(s)^{-1} \\ &= -{}^t\Phi(s)^{-1}{}^tK(s) \\ &= {}^t\Phi(s)^{-1}K(s) \end{aligned}$$

したがって， ${}^t\Phi(s)^{-1}$ もまた，方程式 (1.18) の解であり，初期値は ${}^tI_3^{-1} = I_3$ で， $\Phi(s)$ の初期値と一致する．ここで，解の一意性を適用すると，全区間 (a, b) で ${}^t\Phi(s)^{-1} = \Phi(s)$ であることがわかる．行列式については，直交行列の行列式が ± 1 のみであり， s_0 で 1 で， $\Phi(s)$ の行列式は (a, b) 上連続であるから，恒等的に 1 である．

以上により，行列の 1 階線型常微分方程式 (1.18) の解について，十分な知識を得た．これらを用いて，定理 1 の証明をしよう．

証明 (一意性) 同じ曲率 $\kappa(s)$ ，同じ捩率 $\tau(s)$ をもつ 2 つの C^r 曲線 $x(s)$ ， $\tilde{x}(s)$ が与えられたとする．それぞれのフルネ標構を $\langle e_1(s), e_2(s), e_3(s) \rangle$ ， $\langle \tilde{e}_1(s), \tilde{e}_2(s), \tilde{e}_3(s) \rangle$ とおき，それらを並べて得られる行列を

$$F(s) = (e_1(s), e_2(s), e_3(s)), \quad \tilde{F}(s) = (\tilde{e}_1(s), \tilde{e}_2(s), \tilde{e}_3(s))$$

とする．これらは同じ $K(s)$ に関する方程式 (1.18) の 2 つの解である．したがって，上記 2) より，それぞれの初期値を $F_0 = F(s_0), \tilde{F}_0 = \tilde{F}(s_0)$ とすると

$$F(s) = F_0\Phi(s), \quad \tilde{F}(s) = \tilde{F}_0\Phi(s)$$

よって， $A = \tilde{F}_0F_0^{-1}$ とおけば， A は回転を表す直交行列となり， $\tilde{F}(s) = AF(s)$ と表される．したがって，特に $\tilde{e}_1(s) = Ae_1(s)$ となる．さらに，積分 $\int_{s_0}^s d\sigma$ をすれば， $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{x}}(s_0) - A\mathbf{x}(s_0)$ として

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(s) &= \tilde{\mathbf{x}}(s_0) + \int_{s_0}^s \tilde{e}_1(\sigma) d\sigma = A\mathbf{x}(s_0) + \mathbf{b} + \int_{s_0}^s Ae_1(\sigma) d\sigma \\ &= A\mathbf{x}(s_0) + A \int_{s_0}^s e_1(\sigma) d\sigma + \mathbf{b} = A\mathbf{x}(s) + \mathbf{b} \end{aligned}$$

が得られる．

証明 (存在) 曲率 $\kappa(s)$ ，捩率 $\tau(s)$ をもち，弧長パラメータ表示の曲線 $C = \{\mathbf{x}(s) \mid a < s < b\}$ を求めたい． $\kappa(s), \tau(s)$ より定まる行列 $K(s)$ に対して，方程式 (1.18) を考え，初期値をとる時点 s_0 を任意に定める．それに対して定まる上記 2) の解 $\Phi(s)$ をとり，それを構成する 3 つの縦ベクトルを $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ とおく．

3) より， $\Phi(s)$ は行列式 1 の直交行列であるから， $\langle e_1(s), e_2(s), e_3(s) \rangle$ は右手系の正規直交基底である．これらのベクトルは求める曲線のフルネ標構であるかどうかは，まだわからないが，式 (1.18) より，フルネ・セレの公式を満たすベクトルである．

ここで， $e_1(s)$ を積分した曲線を $C = \{\mathbf{x}(s)\}$ とおく．

$$\mathbf{x}(s) = \int_{s_0}^s e_1(\sigma) d\sigma$$

すると， $\mathbf{x}'(s) = e_1(s)$ かつ $\|e_1(s)\| \equiv 1$ より， s は C の弧長パラメータで， $e_1(s)$ は C の第 1 フルネ標構になる． $e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s)$ かつ $\|e_2(s)\| \equiv 1$ より， $\kappa(s)$ は C の曲率で， $e_2(s)$ は C の第 2 フルネ標構である．さらに， $\langle e_1(s), e_2(s), e_3(s) \rangle$ は右手系の正規直交基底であるから， $e_3(s)$ は C の第 3 フルネ標構となる．そして， $e_2'(s) = -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s)$ より， $\tau(s) = \langle e_2'(s), e_3(s) \rangle$ で，したがって， $\tau(s)$ は C の捩率である．

1.3.2 曲率の零点

曲線の形状は曲率と捩率で定まるということを見てきたが，それは曲率が 0 にならない範囲でのことである．曲率に 0 になるところがあると，どういふことになるだろうか．次の例では，特に異常なことは起こらない．

例 次の曲線を考えよう．

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$$

やや計算は大変だが，曲率，捩率を求めることができる．

$$\kappa(t) = \frac{6|t|\sqrt{1+4t^2+4t^6}}{(1+9t^4+16t^6)^{3/2}}, \quad \tau(t) = \frac{2}{1+4t^2+4t^6}$$

$t=0$ で，たしかに曲率は0だが，捩率は何ということもなく $t=0$ を通過している．変わったことといえば，式の上では表れないが，曲線は $t=0$ の前後で右曲がりから左曲がりになる．そのため，フルネ標構の $e_2(t), e_3(t)$ は突然 -1 倍される．しかし，曲率，捩率にはその痕跡をとどめない．いつもこのように，何も変わったことは起きないのであろうか．

以下，ここでは，実解析的でない C^∞ 関数を扱う．典型的なものは次のようなものである．

例 \mathbb{R} 上の関数

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \end{cases}$$

は C^∞ である．

証明 $t > 0$ のところで導関数を求めると

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}, \quad \ddot{\varphi}(t) = \frac{1-2t}{t^4} e^{-\frac{1}{t}}$$

となる．帰納法と簡単な計算により， $t > 0$ のとき，各 n に対して，ある多項式 $P_n(t)$ が存在して

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{-\frac{1}{t}}$$

が成り立つことがわかる．

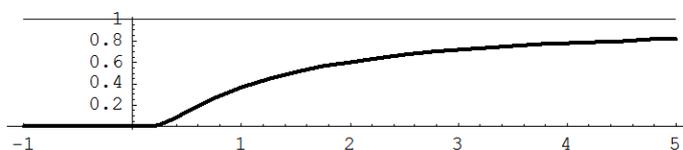
その上で， n に関する帰納法で

$$\varphi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \end{cases}$$

を示そう．実際には，上を仮定するとき， $t=0$ で $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$ を示せば十分である． e^t は $t \rightarrow \infty$ のとき，いかなる t^N より速く大きくなる．したがって，区間 $[-1, 1]$ 上で，任意の自然数 N に対して，ある $M > 0$ が存在して

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq Mt^N$$

を満たす．これより，0 において $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$ であることが示される．

図 1.11: $\varphi(t)$ のグラフ

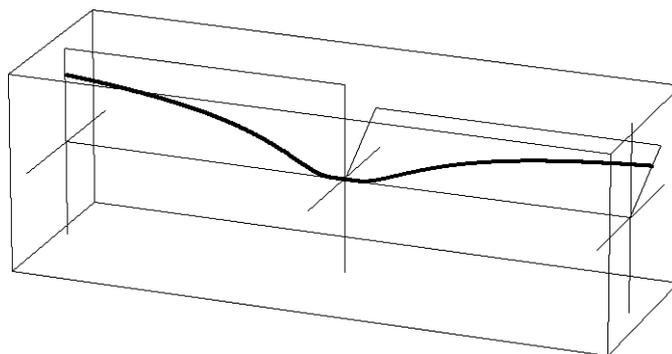
例 θ を固定するとき，次の曲線 $C_\theta = \{x(t)\}$ を与える．

$$x(t) = \begin{pmatrix} \varphi(-t) + \varphi(t) \cos \theta \\ \varphi(t) \sin \theta \\ t \end{pmatrix}$$

これは， xz 平面に $x = \varphi(-z)$ のグラフをおき， xz 平面を z を軸として θ だけ回転した平面に $r = \varphi(z)$ のグラフをおいたものである．どの θ の値に対しても C^∞ 曲線になる．角 θ が異なれば曲線 C_θ は異なる曲線であるが，曲率，捩率は θ によらず一定で

$$\kappa(t) = \frac{|\ddot{\varphi}(|t|)|}{\left(1 + \dot{\varphi}(|t|)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau(t) \equiv 0$$

この場合も，捩率は恒等的に 0 で，曲率が 0 であるところを越えても連続である．しかし，ここで注目すべきなのは，基本定理の一意性の部分が成り立たないことである．曲率が 0 のところがあると，異なる形状の曲線が同じ曲率，捩率をもつことがあるのである．

図 1.12: 曲線 C_θ

最後の例では、振率の連続性が成り立たない。まず次の関数を与える。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ \varphi(t) \cos \frac{10}{t} & (t > 0) \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ \varphi(t) \sin \frac{10}{t} & (t > 0) \end{cases}$$

$\varphi(t)$ のときと同様に、これらの関数も \mathbb{R} 上 C^∞ である。

例 (不連続な振率をもつ曲線)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ t \end{pmatrix}$$

とおく。 $t > 0$ のところでは

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} \varphi(t) \cos \frac{10}{t} \\ \varphi(t) \sin \frac{10}{t} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{10}{t} & -\sin \frac{10}{t} & 0 \\ \sin \frac{10}{t} & \cos \frac{10}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \\ &= \rho_z \left(\frac{10}{t} \right) \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これは xz 平面の $x = \varphi(z)$ のグラフを高さ t のところでは z 軸を中心に $\frac{10}{t}$ だけ回転させて得られものである。この回転を表す行列を $\rho_z \left(\frac{10}{t} \right)$ と表した。 $\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \cos \frac{10}{t} + \frac{10}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \sin \frac{10}{t} \\ -\frac{10}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \cos \frac{10}{t} + \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \sin \frac{10}{t} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{10}{t} & -\sin \frac{10}{t} & 0 \\ \sin \frac{10}{t} & \cos \frac{10}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ -\frac{10}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_z \left(\frac{10}{t} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ -\frac{10}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{99+2t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}}\cos\frac{10}{t} + \frac{20-20t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}}\sin\frac{10}{t} \\ -\frac{20-20t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}}\cos\frac{10}{t} - \frac{99+2t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}}\sin\frac{10}{t} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{10}{t} & -\sin\frac{10}{t} & 0 \\ \sin\frac{10}{t} & \cos\frac{10}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{99+2t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}} \\ -\frac{20-20t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho_z \left(\frac{10}{t} \right) \begin{pmatrix} -\frac{99+2t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}} \\ -\frac{20-20t}{t^4}e^{-\frac{1}{t}} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)$ を正規直交化したものが $e_1(t), e_2(t)$ であるから, これらの式は $t \searrow 0$ のとき

$$e_1(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \left\| e_2(t) - \rho_z \left(\frac{10}{t} \right) \begin{pmatrix} -\frac{99}{101} \\ -\frac{20}{101} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0$$

となることを示している. 後式は $e_2(t)$ が $t \searrow 0$ のとき, z 軸を中心に無限回回転することを示している. したがって, $\|\dot{e}_2(t)\| \rightarrow \infty$ で, $\kappa(t) \rightarrow 0$ であるから, これは $\tau(t) \rightarrow \infty$ を示している. このことは, やや複雑な計算をすることで直接確かめることもできる.

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\sqrt{101}e^{-\frac{1}{t}}}{t^4} \sqrt{\frac{101 - 4t + 4t^2 + \frac{10100e^{-\frac{2}{t}}}{t^4}}{\left(1 + \frac{101e^{-\frac{2}{t}}}{t^4}\right)^3}} \\
\tau(t) &= -\frac{10}{t^2} \frac{101 - 4t + 6t^2}{101 - 4t + 4t^2 + \frac{10100e^{-\frac{2}{t}}}{t^4}}
\end{aligned}$$

このように, この曲線は $t \searrow 0$ のとき, 曲率は 0 に近づき, 撓率は無限大に発散するが, 曲線そのものは C^∞ の滑らかさをもって, $t \leq 0$ まで延長される.

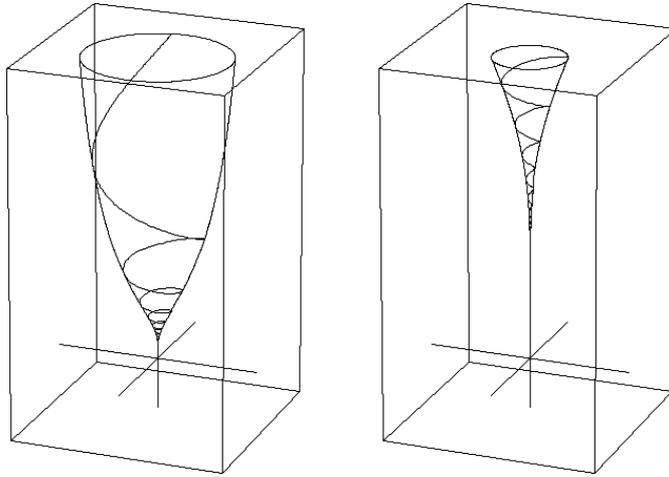


図 1.13: 不連続な捩率をもつ曲線とその拡大図

問 題

1 空間の自明でない連続的な運動 M_t によって、自分自身に重なる曲線は直線、円、常螺旋に限ることを示せ。

2 円錐状の山を一定のこう配で登っていく登山道がある。そのような曲線を求めよ。さらに、その弧長パラメータ、曲率、捩率を求めよ。

3 パラメータ表示

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos nt \end{pmatrix}$$

で与えられる曲線は $\cos nt$ のグラフを半径 1 の円柱に巻きつけて得られる閉曲線であることを示せ。この曲線を zx 平面に射影して得られる曲線の定める関係式を $z = T_n(x)$ とする。 T_n の満たす漸化式を求め、 T_2, \dots, T_5 を計算し、その概形を求めよ。 $T_n(x)$ を因数分解し、その極値を求めよ。

4 半径 a の円に糸を巻きつけ、一端に鉛筆をつけ、糸がたるまないようにほどくとき、紙に描かれる渦巻き状の曲線を求めよ。鉛筆が円に接した状態から、一回りするときの曲線と、そのときの糸で囲まれた図形を G_a とする。このようにして得られた 2 つの図形 G_a, G_b を平面上に適当に動かし、曲線で接するようにする。そこで、それらの図形のそれぞれの円の中心を固定する。 G_a を角速度 ω で回転させ、 G_b を G_a と接し続けさせるとき、 G_b の角速度を求めよ。この曲線はインボリュート曲線といわれ、歯車の設計に利用される。

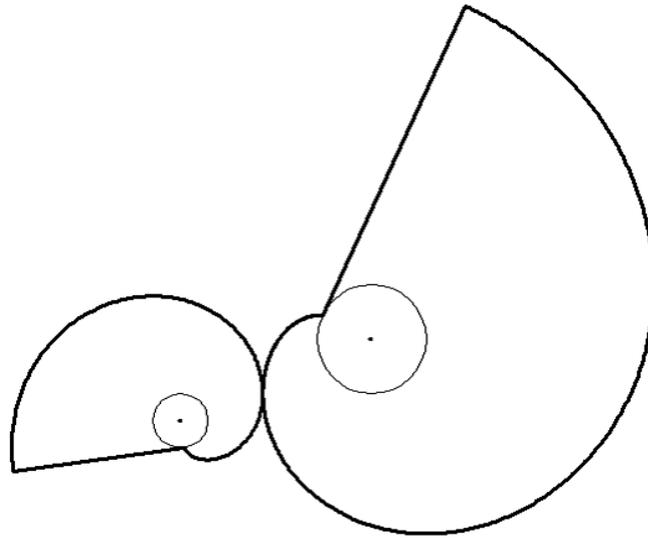


図 1.14: インボリュート曲線

第2章 曲面論

曲線論に引き続いて、ユークリッド空間の中のなめらかな曲面を扱う。曲線が1つのパラメータで表されたのに対し、曲面を表すには2つのパラメータが必要である。すると、パラメータと曲面上の長さの関係も複雑になる。それを表すものが第1基本形式である。これは各点に対して接平面上の2次形式を定めている。曲面を、パラメータを用いて表すと、地球上に緯線、経線を定めるように、曲面上を2種類の曲線の網目で覆うことになる。第1基本形式はこれらの曲線の長さ、曲線同士の角度を定めている。第1基本形式のみを定めた状態は、曲面をしなやかで伸び縮みしない材料でつくるようなもので、曲面の曲がり方までを決めてはいない。曲面の曲がり方を指定するには第2基本形式を考える必要がある。これも接平面上の2次形式で、接平面を基準面として、曲面の高さを近似している2次式である。これらを用いて曲面の種々の曲率を定めることができる。次に、これら2つの基本形式で曲面の形は定まるか、という問題がある。曲線論と同様に答えはイエスであり、微分方程式の議論に帰着するのであるが、独立変数が2つあるので、偏微分方程式の理論が必要になる。

2.1 C^r 曲面の定義

2.1.1 いろいろな曲面

例 (平面 (plane)) 平面 Π は曲面の1つである。式

$$ax + by + cz = d$$

で表される。どこまでも、無限のかなたまで広がっている。ここで終わりという点はない。

点は、どの点も同じである。すなわち、 $a, b \in \Pi$ に対して、 Π を Π に写す合同変換で、 a を b に写すものがある。このことを、平面は等質 (homogeneous) であるという。

各点に対して、どの方向を見ても同じ形である。すなわち、 $a \in \Pi$ から出る任意の半直線 (動径) $l, m \subset \Pi$ に対して、 a を動かさない、 Π を Π に写す合同変換で、 l を m に写すものがある。このことを、平面は等方的 (isotropic) であるという。

例 (球面 (sphere)) 典型的な曲面である．原点からの距離が r の点の全体で，式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

で表される．有限の範囲に含まれる．どこにも境界はない．すなわち，ここまでは曲面で，ここからは曲面でないという点はない．球面上を，どこまで進んでも曲面は目の前に続いている．

平面と同じく，球面も等質かつ等方的である．

曲面の性質のうち，等質であるとか，等方的であるというのは特殊な性質で，平面や球面を特徴づけるものである．ふつうの曲面は，等質でも等方的でもない．

例 単位球面を， x 軸方向に a 倍， y 軸方向に b 倍， z 方向に c 倍だけしたものの，すなわち，行列 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ による線型変換を施したものは楕円面 (ellipsoid) といわれるものである．これは式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

で表される． $0 < a < b < c$ のとき，等質でも等方的でもない．

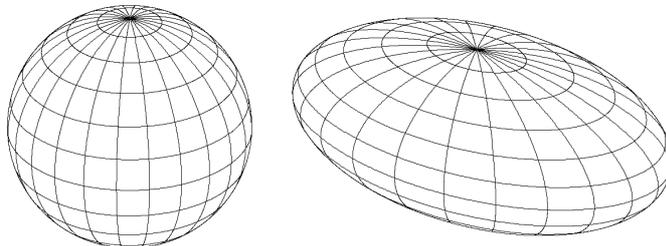


図 2.1: 球面と楕円面

楕円面は，2次曲面の1つである．一般に，2次式で表される曲面を2次曲面という．その他の典型的な2次曲面には次のものがある．

例 (1葉双曲面 (hyperboloid of one sheet))

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

例 (2葉双曲面 (hyperboloid of two sheets))

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

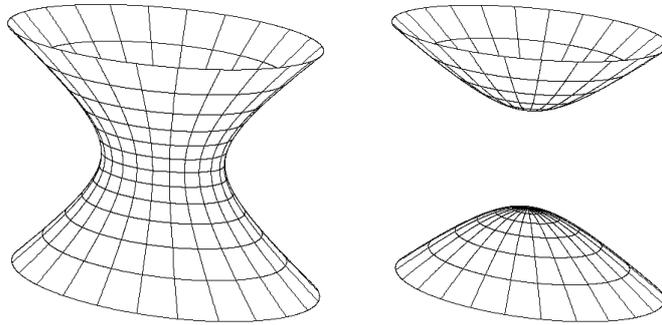


図 2.2: 1 葉双曲面と 2 葉双曲面

例 (楕円放物面 (elliptic paraboloid))

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

例 (双曲放物面 (hyperbolic paraboloid))

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

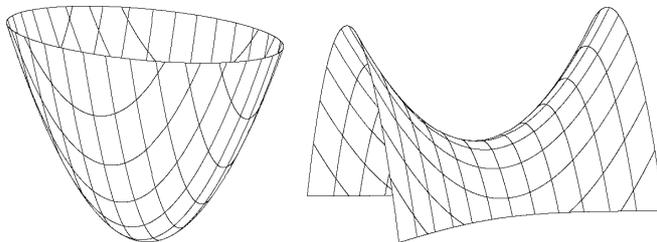


図 2.3: 楕円放物面と双曲放物面

これら以外の 2 次曲面には、楕円柱、双曲柱、放物柱、楕円錐がある。双曲錐、放物錐も考えられるが、これらは楕円錐と同じものである。

考えやすい曲面の例として回転面 (surface of revolution) がある。曲線を、別の直線を軸として回転させるとき、軌跡として得られる曲面である。

例 (トーラス (torus)(輪環面)) zx 平面に、 z 軸と交わらない円を描き、その円を z 軸に関して回転させて得られる、ドーナツの表面または浮き輪のような、回転面である。

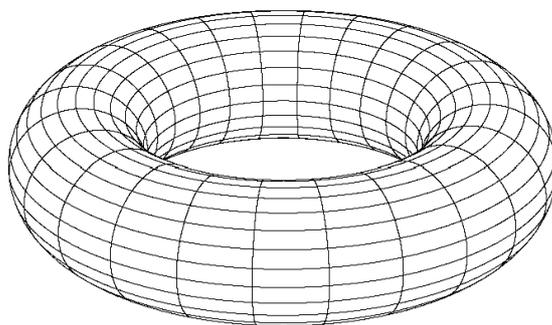


図 2.4: トーラス

球面，楕円面，トーラスのように，有界 (含まれている範囲が有限) で，境界のない曲面を閉曲面 (closed surface) という．これまでの例では，それ以外は閉曲面ではない．円板や，長さ有限の円柱のように，有界でも境界があれば，閉曲面ではない．

ここで，一般の，なめらかな曲面というものの特徴を考えてみよう．今までに考えた曲面の任意の 1 点に対し，その十分近いところを考えよう．その曲面がなめらかならば，その部分は平面に非常に近いもの，すなわち，平面ではないが平面をごくわずかだけ変形させた (曲げた) ものになっている．より小さい範囲だけを見れば，より平面に近い曲面になっていることが想像できるであろう．

この特徴をもって，なめらかな曲面の定義とする．すなわち，空間の部分集合で，その各点に対し，十分近いところが，平面をごくわずかだけゆがめたものになっているものを，なめらかな曲面というのである．

境界をもつ曲面の場合，境界上の点に関しては，上に述べた条件を満たさない (と考える)．境界点以外の点は上の条件を満たしている．

式で表せない曲面，閉曲面はいくらでもある．たとえば，球面を少しゆがめたもの，大きくゆがめたもの．また，トーラスをゆがめることもできる．

トーラスに関しては，結ぶことができる．また，内側で結ぶこともできる．

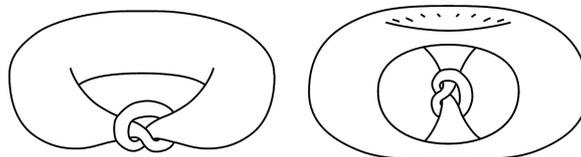


図 2.5: 結んだトーラスと内側で結んだトーラス

閉曲面をガスタンクのようなものと考えよう．2つの曲面に小さな穴をあけ，その穴にパイプを溶接して，2つのタンクの中身をつなげることができる．十分なめらかに仕事をすれば，得られたタンクはなめらかな曲面である．このようにして2つの閉曲面をつなげる操作を連結和 (connected sum) という．

トーラス2つの連結和をとると，2人用の浮き輪のような閉曲面が得られる．さらに，トーラスを連結和する操作を繰り返すことにより， g 人用の浮き輪曲面が得られる．この曲面は種数 (genus) g の閉曲面といわれる．



図 2.6: 種数 g の閉曲面

今まで考えた曲面は，すべて裏表の区別がある．それは空間内である部分を囲んでいるといいかえることもできる．球面はある体積をもつ領域を囲んでいる．トーラスもそうである．平面は，その片側の領域を囲んでいると考える．円柱や円錐はその内側の領域を囲んでいる．その他の2次曲面もそうである．式“ $f = 0$ ”で定義された曲面は，式“ $f > 0$ ”で定まる領域を囲んでいる．そのようなものに対しては，外側を白で塗り，内側を赤のペンキで塗ることができる．そのとき，赤と白のペンキは混ざらず，曲面に裏表の区別が付く．

ところがそうでない曲面も存在するのである．メビウスの帯 (Möbius band) といわれるものがそれである．長方形の帯を2つのはじでつないで輪を作るのだが，故意に間違えて，表と裏がつながるように半ひねりをしてつなげるのである．表と裏を区別するつもりで赤と白のペンキを両面に塗っていくと，ひとまわりしたところで赤いところに白を，白いところに赤を塗ることになってしまう．このような性質を持つ曲面を，単側曲面または向き付け不可能曲面という．メビウスの帯は，閉曲面ではないが，前に述べたなめらかな曲面

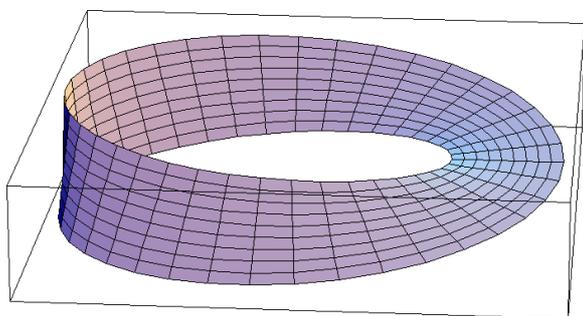


図 2.7: メビウスの帯

の条件を満たしていることは想像できるであろう。

向き付け不可能な閉曲面は存在しない。しかし、自分自身との交差をもつものも曲面の仲間に入れることによって、向きづけ不可能な閉曲面を考えることができる。典型的なものは、クラインの壺 (Klein bottle) といわれるものである。これは、ジェットエンジンのカバーのような曲面で、空気を取り入れ口に続く風洞を延ばして、自己交差を許して、カバーの外に導き、ジェットの吹き出し口に逆に取り付けられたものである。

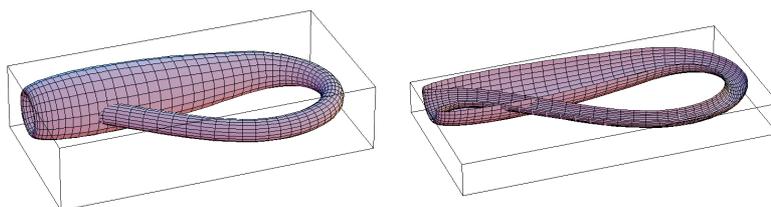


図 2.8: クラインの壺とその断面

自己交差のところでは、同じ点に、2つまたはそれ以上の枚数の曲面がきている。それぞれを別に考えて、その1つだけを見て、それ以外の面を無視して、なめらかな曲面の条件を満たすものとする。

自己交差を許すと、8の字状の管を考えることができる。これを2芯コードのように考えよう。8の字管は、それ自身、向き付け可能である。どちらが表とはいえないが、片側を白、その裏を赤で塗る。自己交差のところでは、片方だけ考えて、塗り進んでいく。すると、外から見ると、2芯コードの片方が赤、もう片方が白と塗り分けられて見える。適当な長さで切り、輪にして自分自身とつなげる。このとき、 180° だけひねって、赤い線と白い線をつなぐようにする。表の面と裏の面がつながるから、これも向きづけ不可能閉曲面の1つである。

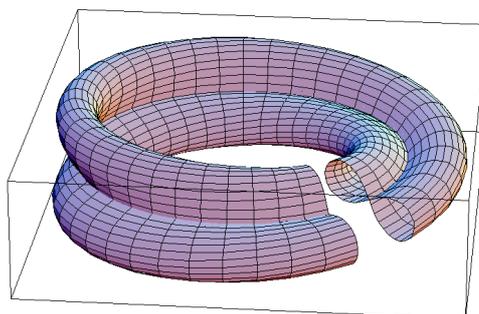


図 2.9: 短絡2芯コード

最後に、閉曲面でない曲面の例をいくつかあげておこう。

- 無限人乗りの浮き輪,
- 左右 2 方向にのびた無限浮き輪,
- n 方向にのびた無限浮き輪,
- 無限網目,
- 無限ジャングルジム,
- 無限分岐管.

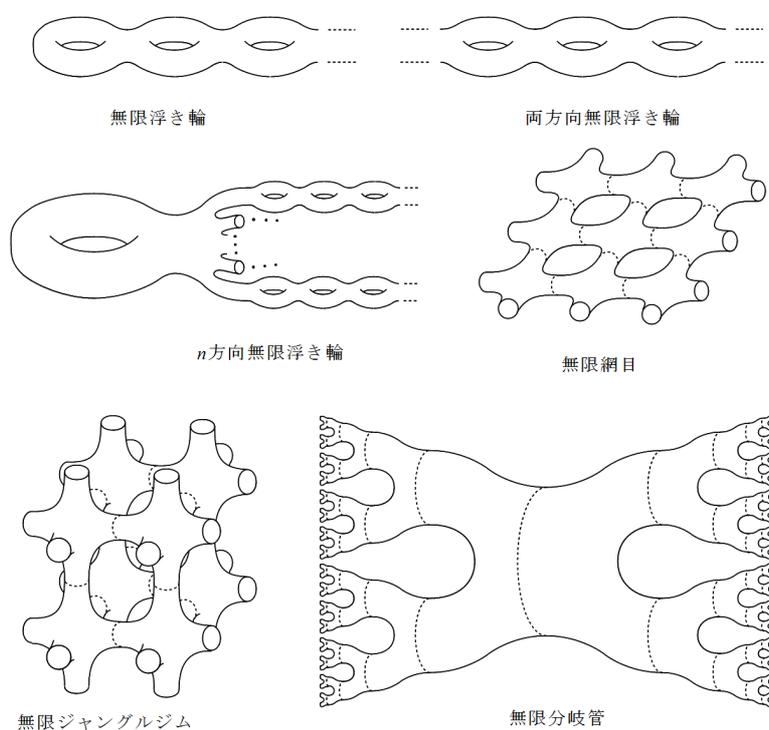


図 2.10: 閉曲面でない曲面

2.1.2 曲面のパラメータ表示

曲面とは、 \mathbb{R}^3 の部分集合で、局所的に 2 つのパラメータで表されるものである。すなわち、 \mathbb{R}^2 の開集合 U 上の 3 つの C^r 関数で

$$S = \{\mathbf{x}(u, v) \mid (u, v) \in U\}, \quad \mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

と表されるものである．これをパラメータ表示という．パラメータ表示において， v を固定し， u の関数と思うと，これは曲線である． u 曲線という．同様に， v 曲線も定義される．それらの速度ベクトルは

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

で表される．このとき，各 $(u, v) \in U$ に対して u 曲線， v 曲線の速度ベクトルが一次独立であることを要求する．この条件を満たすパラメータ表示が定まっている曲面の一部を C^r 曲面片という．これらを用いて， C^r 曲面を定義する．

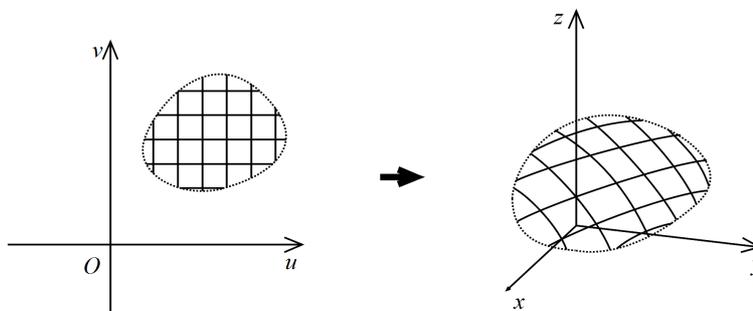


図 2.11: C^r 曲面片

定義 C^r 曲面 (surface) とは，ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の部分集合で可算個 (有限個でもよい) の C^r 曲面片で覆われているものである．ただし，曲面片どうしは，互いの開部分集合で交わっているものとし，また，自己交差があるときには，それぞれ 1 つの面ごとに考えるものとする．

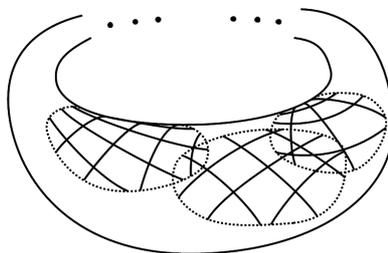


図 2.12: C^r 曲面

これを一応の定義とするが、十分正確に定義しているとはいえない。正確な定義には多様体論の概念を必要とする。ともかく、例をあげてみよう。

例 球面 S^2 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

球面上の点で、 u を緯度、 v を経度とするものを $x(u, v)$ とする。

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$$

u 曲線は経線、 v 曲線は緯線である。それらの速度ベクトルは

$$x_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

で、これらは直交し、0 でないので一次独立である。この表示では南北両極は曲面片で覆われていない。

両極を覆う曲面片としては、たとえば

$$y(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \pm\sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}, \quad (u^2 + v^2 < 1)$$

がある。また、緯度経度パラメータにおいて、 x 座標と z 座標を取りかえたものでもよい。

例 楕円面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

これは球面において、 x 座標を a 倍、 y 座標を b 倍、 z 座標を c 倍したものである。

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} a \cos u \cos v \\ b \cos u \sin v \\ c \sin u \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$$

u 曲線は平面 “ $y = x \tan v$ ” との切り口になり、楕円である。

v 曲線も平面 “ $z = c \sin u$ ” との切り口になり、また、楕円である。

例 1 葉双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

三角関数のかわりに、双曲線関数を用いる。

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ b \cosh u \sin v \\ c \sinh u \end{pmatrix}$$

u 曲線、 v 曲線ともに平面曲線になり、 u 曲線は双曲線、 v 曲線は楕円である。

例 2葉双曲面： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
 前者と同様である。2葉あるため、 z 座標に±がつく。

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ b \sinh u \sin v \\ \pm c \cosh u \end{pmatrix}$$

u 曲線、 v 曲線ともに平面曲線になり、 u 曲線は双曲線、 v 曲線は楕円である。

例 楕円放物面： $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
 xy 平面上の2次形式のグラフで表すことができる。

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a u \\ b v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

u 曲線は互いに合同な放物線である。 v 曲線も互いに合同な放物線である。
 水平面“ $z = h$ ”との断面は楕円になる。

例 双曲放物面： $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
 前者と同様である。2次形式が不定符号である。

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a u \\ b v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

u 曲線は合同な放物線である。 v 曲線も合同な放物線である。
 水平面“ $z = h$ ”との断面は双曲線になる。

例 トーラス：

zx 平面上の z 軸から距離 R の点を中心とする半径 r の円を z 軸を中心に回転して得られる回転面。 u を緯度、 v を経度という。いずれも、0 から 2π まで動く。

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

u 曲線は、 z 軸を含む平面上の半径 r の円である。 v 曲線は、水平な円である。

例 螺旋面 (helicoid)：

z 軸と垂直に交わる直線が、一定の速度で回転しながら、上昇するとき軌跡として得られる曲面。

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ a v \end{pmatrix}$$

u 曲線は z 軸に垂直な直線である。 v 曲線は半径が u で勾配が $\frac{a}{u}$ の常螺旋である。

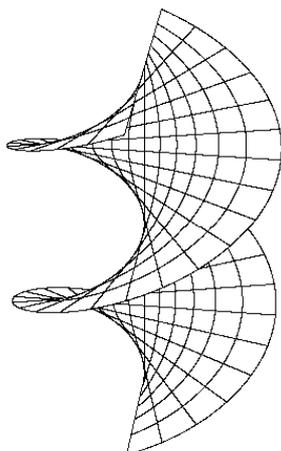


図 2.13: 螺旋面

2.2 接平面と第1基本形式

2.2.1 接ベクトルと接平面

空間 \mathbb{R}^3 の中に曲面 $S = \{x(u, v)\}$ とその上の点 $x_0 = x(u_0, v_0)$ が与えられたとき、与えられたベクトルが x_0 で曲面に接するかどうか判定することは、すぐにはできない。 S に接するベクトルを定義することから始めよう。たとえば、 u 曲線、 v 曲線の接ベクトル

$$\mathbf{x}_u(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

は S に接している。より一般に、次のように定義する。

定義 C^r 曲面 S に含まれる C^r 曲線の速度ベクトルを、その点での S の接ベクトルという。ある点 x_0 での接ベクトル全体を接平面といい、 $T_{x_0}S$ で表す。

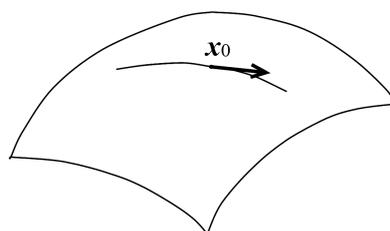


図 2.14: 接ベクトル

この段階では、接平面が平面かどうかはまだわからない。実際には、 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ を基底とする線型部分空間となる。このことを以下で示そう。 C^r 曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ が $t = 0$ で \mathbf{x}_0 を通り、 S に含まれるとする。すなわち、 $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ かつ $\gamma(t) \in S$ ($-\varepsilon < t < \varepsilon$) とする。

補題 $t = 0$ で \mathbf{x}_0 を通り、 S に含まれる C^r 曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ に対して、 C^r 関数 $u(t), v(t)$ が存在して $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ と表される。

証明 \mathbf{n}_0 を外積 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ とする。 $\mathbf{x}(u, v)$ の定義域を U として、写像 $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\Phi(u, v, w) = \mathbf{x}(u, v) + w \mathbf{n}_0$$

により定義すると $(u_0, v_0, 0)$ での Jacobi 行列は

$$J\Phi(u_0, v_0, 0) = (\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \mathbf{n}_0)$$

となり、正則行列である。したがって、逆写像定理より、 Φ は $(u_0, v_0, 0)$ の近くで C^r 微分同相写像になる。とくに、 $\Phi(u, v, w)$ が、 S に含まれるならば $w = 0$ である。

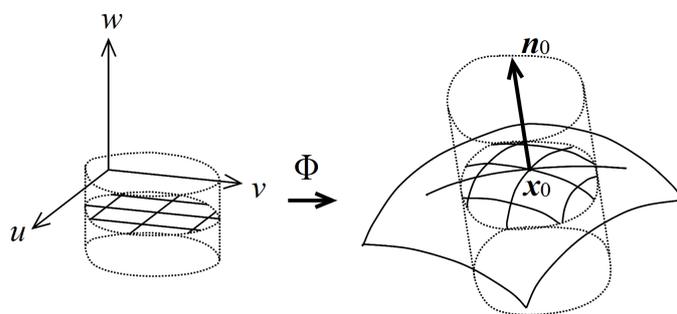
$-\varepsilon < t < \varepsilon$ なる t に対し

$$(u(t), v(t), w(t)) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$$

とおけば、 $u(t), v(t), w(t)$ は C^r 関数で $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t), w(t))$ 。 $\gamma(t)$ は S に含まれるから $w(t) \equiv 0$ である。したがって

$$\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t), 0) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

が成り立つ。

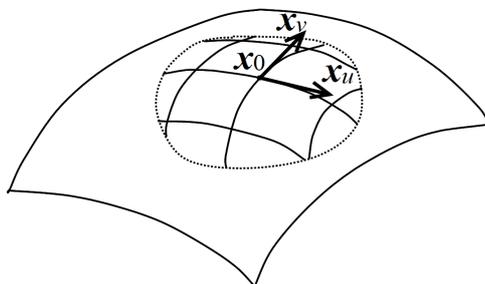
図 2.15: 写像 Φ

このとき, $\xi = \dot{\gamma}(0)$ とすると, $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ であるから

$$\xi = \dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t), v(t)))|_{t=0} = \dot{u}(0)\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \dot{v}(0)\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

したがって, ξ は $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ と $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ の 1 次結合で表される. 以上で次のことが証明された.

定理 2 接平面 $T_{\mathbf{x}_0}S$ は $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ と $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ を基底とするベクトル空間である.

図 2.16: 基底 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$

記号 (接平面上の 1 次形式 du, dv) $\xi \in T_{\mathbf{x}_0}S$ に対し, 基底 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ による 1 次結合

$$\xi = \alpha \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \beta \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

の係数 α と β を対応させる関数を du, dv と表す.

$$\alpha = du(\xi), \quad \beta = dv(\xi)$$

さらに

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)du + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)dv \quad (2.3)$$

と表す．

接平面 $T_{x_0}S$ 上の関数は du, dv の関数として表すことができる．

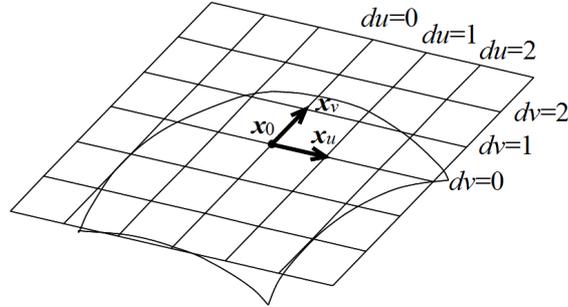


図 2.17: 1 次形式 du, dv

2.2.2 第 1 基本形式

定義 接ベクトル ξ に対して，その \mathbb{R}^3 における長さの 2 乗を対応させる関数 $g : T_{x_0}S \rightarrow \mathbb{R}$ を第 1 基本形式という．

$$g(\xi) = (d\mathbf{x}(\xi), d\mathbf{x}(\xi)) = \|d\mathbf{x}(\xi)\|^2 \quad (2.4)$$

$g = (d\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ とも表す．第 1 基本形式は接平面上の正定値 2 次形式である．

パラメータ表示 $S = \{\mathbf{x}(u, v)\}$ に対して， g を du, dv の関数で表すことができる．

$$\begin{aligned} g(\xi) &= (d\mathbf{x}(\xi), d\mathbf{x}(\xi)) = (\mathbf{x}_u du(\xi) + \mathbf{x}_v dv(\xi), \mathbf{x}_u du(\xi) + \mathbf{x}_v dv(\xi)) \\ &= (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u)(du(\xi))^2 + 2(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)du(\xi)dv(\xi) + (\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v)(dv(\xi))^2 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} g &= g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2 \\ g_{11} &= (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u), \quad g_{12} = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v), \quad g_{22} = (\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) \end{aligned} \quad (2.5)$$

である．この g_{ij} たちに関して次のことが成り立つ．

- g は正定値の 2 次形式であるから $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0$
- g_{11} は \mathbf{x}_u のノルムの 2 乗．
- g_{22} は \mathbf{x}_v のノルムの 2 乗．
- $\arccos \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$ は \mathbf{x}_u と \mathbf{x}_v のなす角度を表している．

第1基本形式は uv 平面をどう伸ばし, どう縮めて曲面をつくるかを指定しているといえる.

例 (球面の第1基本形式)

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

であった. これより

$$g_{11} = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = 1, \quad g_{22} = (\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = \cos^2 u, \quad g_{12} = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0$$

したがって

$$g = (du)^2 + \cos^2 u (dv)^2$$

すなわち, \mathbf{x}_u の長さは1, \mathbf{x}_v の長さは $\cos u$ で, \mathbf{x}_u と \mathbf{x}_v は直交している. このことは, uv 平面から球面に写るとき,

- u 方向の長さは変化せず, 原寸通り.
- v 方向の長さは, u 座標にしたがって, 倍率 $\cos u$ 倍で縮まり, 極 $u = \pm \frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて縮小される.
- u 方向と v 方向のつくる角度は直角のまま変わらない.

その結果, 球面の丸さに沿うように曲がっていることを表している.

例 (楕円および双曲放物面の第1基本形式)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} au \\ bu \\ u^2 \pm v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \pm 2v \end{pmatrix}$$

であった. これより

$$g_{11} = a^2 + 4u^2, \quad g_{22} = b^2 + 4v^2, \quad g_{12} = \pm 4uv$$

したがって

$$g = (a^2 + 4u^2)(du)^2 \pm 8uv dudv + (b^2 + 4v^2)(dv)^2$$

g_{11}, g_{22}, g_{12} にしたがって, uv 平面を伸縮させてみる.

- g_{11} により, u 方向を $\sqrt{a^2 + 4u^2}$ 倍に伸ばす. このとき, v 軸に平行な直線は平行なままである.
- g_{22} により, v 方向を $\sqrt{b^2 + 4v^2}$ 倍に伸ばす. このとき, u 軸に平行な直線は平行なままである.
- 楕円放物面 [双曲放物面] のときは, u 方向と v 方向のつくる角度を, $uv > 0$ のときは鋭角 [鈍角] に, $uv < 0$ のときは鈍角 [鋭角] に, 変えなくてはならない.

そのためには, uv 平面を, v 軸に平行な, 下に凸な放物柱に巻きつけたのちに v 軸に平行な直線たちを, すべて合同な, 下に凸な [上に凸な] 放物線に変形すればよい.

このように, 第 1 基本形式は曲面の形に密接に関係している. ピアノ線とハンダごてでかご状の曲面の模型をつくる時, 次の目までの間隔と交わりの角度を指定しているといえる. しかし, たとえば, このようにしてつくった半球状の模型は, 若干の変形の余地がある. ゴムまりを半分に切って, 切り口の直径の両端の点を持てば, ある範囲で間隔を狭めたり, 広げたりすることができる. 次もそのような例である.

例 (螺旋面)

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ av \end{pmatrix}$$

$$u \text{ を } a \sinh u \text{ で置き換えると } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ a \sinh u \sin v \\ av \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ a \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -a \sinh u \sin v \\ a \sinh u \cos v \\ a \end{pmatrix}$$

よって

$$g_{11} = a^2 \cosh^2 u, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2(\sinh^2 u + 1) = g_{11}$$

すなわち

$$g = a^2 \cosh^2 u ((du)^2 + (dv)^2)$$

ここで, $g_{11} = g_{22}, g_{12} = 0$ が成り立っている. その結果, uv 平面の方眼のつくる模様は, 曲面上の (近似的に) 正方形からなる網目模様写っている. このようなパラメータを曲面の等温パラメータという. u を $a \sinh u$ で置き換えたのは等温パラメータにするためである.

例 (懸垂面 (catenoid)) :

zx 平面の懸垂線 (catenary) $x = a \cosh \frac{z}{a}$ を z 軸のまわりに回転させて得られる回転面を懸垂面という.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ a \cosh u \sin v \\ a u \end{pmatrix}$$

すると

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ a \sinh u \sin v \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -a \cosh u \sin v \\ a \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$g_{11} = a^2(\sinh^2 u + 1) = a^2 \cosh^2 u, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 \cosh^2 u = g_{11}$$

すなわち

$$g = a^2 \cosh^2 u ((du)^2 + (dv)^2)$$

で, これは螺旋面の第 1 基本形式と全く同じである.

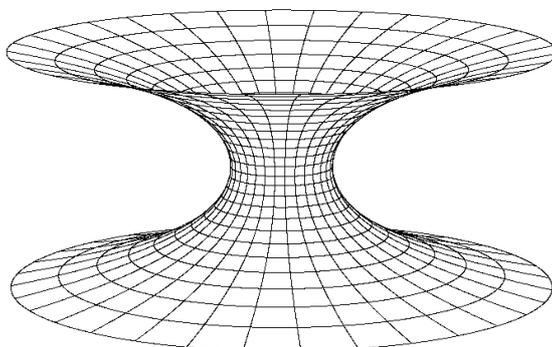


図 2.18: 懸垂面

この 2 つの例は, まったく異なる曲面が, 同じ第 1 基本形式を持つことがあることを示している. すなわち, 曲面の形は第 1 基本形式だけでは定まらないのである. 同じパラメータ (u, v) で表される点を対応させてみよう. 懸垂面においては $v \equiv v' \pmod{2\pi}$ のとき, 同じ点を表すから, この対応は螺旋面から懸垂面への写像を定める. 第 1 基本形式を変えない写像であるから, uv 平面に比べての伸び方, 縮み方がまったく同じである. これは, 曲面が, 紙やある種のプラスチックのような, しなやかに曲がるけれども伸び縮みし

ない素材で作られているとき、しなやかな変形でびたりと重なる条件である。このような、第1基本形式を保つ変換を等長変換という。

螺旋面と懸垂面に対して、このことを確かめよう。螺旋面がしなやかな素材で作られているとする。簡単のため、 $-\pi \leq u \leq \pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$ の範囲で考えよう。この範囲の螺旋面を切り取り、無理にねじれをほどく。すると軸から離れたところ ($u = \pm\pi$ の近く) で、長さが余り、コンプのようなびらびら (フリル) ができる。それを前でさばくと軸が反り返り、上辺と下辺 ($v = \pm\pi$) が重なって、輪ができる。全体を横に $\frac{\pi}{2}$ だけ倒せば懸垂面が得られる。

2.3 ガウス写像と第2基本形式

2.3.1 ガウス写像

曲面の各点 $x(u, v)$ において、曲面の向いている方向は単位法ベクトル $n_{x(u, v)}$ (または $n(u, v)$) で表される。式で表すと、次のようになる。

$$n_{x(u, v)} = n(u, v) = \frac{1}{\|x_u(u, v) \times x_v(u, v)\|} x_u(u, v) \times x_v(u, v) \quad (2.6)$$

曲面の曲がりかたは、曲面の方向の変化率として表されるはずである。

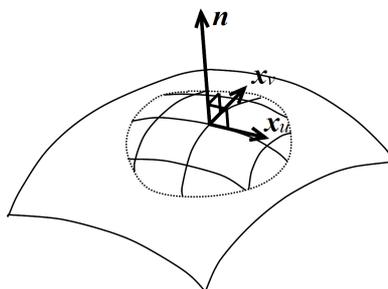


図 2.19: 単位法ベクトル

曲面の各点 x に対し、その点での単位法ベクトル n_x を対応させる写像をガウス (Gauss) 写像という。点 x の像 $\Gamma(x) = n_x$ を原点を始点とする位置ベクトルと思い、終点と $\Gamma(x)$ を同一視して、 $\Gamma(x)$ を単位球面 S^2 上の点と考える。すなわち、ガウス写像 Γ は曲面 S から球面 S^2 への写像である。

$$\Gamma: S \rightarrow S^2, \Gamma(x) = n_x \quad (2.7)$$

例 (回転1葉双曲面: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$):

1 葉双曲面において, $a = b = c = 1$ の場合である.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_u = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ \cosh u \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_v = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{\cosh 2u}} \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$$

を得る. $-1 < \frac{\sinh u}{\cosh u} < 1$ であるから, ガウス写像による像は球面上の南緯 45° から北緯 45° の間の領域になる.

曲面の曲がりかたがガウス写像にどう反映するか調べてみると, 次のことがわかる.

- 球面のような曲面 (上に凸) では, ガウス写像は恒等写像に近い.
- 曲がり方が強いと, ガウス写像は拡大して広い範囲を覆う.
- 曲がり方が逆 (下に凸) ならば, 180° 回転する.
- 鞍型の曲がり方では, ガウス写像は裏返る.

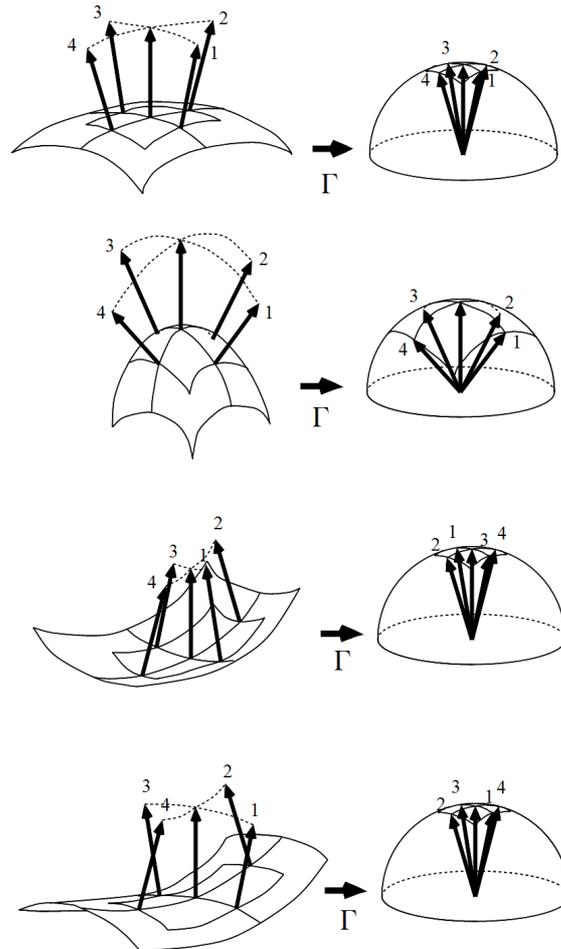


図 2.20: ガウス写像と曲面の曲がり方

2.3.2 第2基本形式

ガウス写像の1次近似

$$dn = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \quad (2.8)$$

を考える．ガウス写像は $x(u, v)$ を $\mathbf{n}(u, v)$ に写すので，その1次近似は $x_u(u, v)$ を $\mathbf{n}_u(u, v)$ に， $x_v(u, v)$ を $\mathbf{n}_v(u, v)$ に写す線型写像である．

$$dn : T_{\mathbf{x}(u,v)}S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad dn(\alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v) = \alpha \mathbf{n}_u + \beta \mathbf{n}_v$$

ここで

$$(\mathbf{n}(u, v), \mathbf{n}(u, v)) \equiv 1$$

を u で偏微分すると

$$(\mathbf{n}_u(u, v), \mathbf{n}(u, v)) \equiv 0$$

よって $\mathbf{n}_u(u, v)$ は $\mathbf{n}(u, v)$ と直交し，したがって， $\mathbf{n}_u(u, v) \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ ，同様に， $\mathbf{n}_v(u, v) \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$

ゆえに， $dn = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ で， dn は $T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ からそれ自身への線型変換になる．

$\xi \in T_{\mathbf{x}}S$ に対して， ξ 方向で曲面が上に曲がっているか，下に曲がっているかを与える量として，第2基本形式

$$\varphi = -(d\mathbf{x}, dn) \quad (2.9)$$

を定める． $d\xi = x(\xi)$ 方向の \mathbf{n} の変化率 $dn(\xi)$ が ξ と逆方向のとき，曲面は上に曲がるからである．

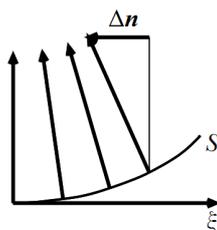


図 2.21: dn と曲面の上下

第2基本形式を du, dv の式で表そう． $\xi = \alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v$ に対し

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= -(\xi, dn(\xi)) = -(\alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v, \alpha \mathbf{n}_u + \mathbf{n}_v) \\ &= -\alpha^2 (\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u) - \alpha \beta \{(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v) + (\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_u)\} - \beta^2 (\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v) \\ &= -(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u)(du(\xi))^2 - \{(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v) + (\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_u)\} du(\xi) dv(\xi) \\ &\quad - (\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v)(dv(\xi))^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\varphi = -(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u)(du)^2 - \{(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v) + (\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_u)\}dudv - (\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v)(dv)^2$$

が成り立つ．ここで $(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}) \equiv 0$, $(\mathbf{x}_v, \mathbf{n}) \equiv 0$ の両辺を u, v で偏微分すると

$$-(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_u) = (\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n})$$

$$-(\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_v) = (\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n})$$

$$-(\mathbf{x}_u, \mathbf{n}_v) = (\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n}) = (\mathbf{x}_{vu}, \mathbf{n}) = -(\mathbf{x}_v, \mathbf{n}_u)$$

である．よって，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \varphi &= H_{11}(du)^2 + 2H_{12}dudv + H_{22}(dv)^2 \\ H_{11} &= (\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n}), \quad H_{12} = (\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n}), \quad H_{22} = (\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

このように，2 階以上の偏導関数に関しても，下つきの文字でその変数に関する偏導関数を表す．

点 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ を固定するとき，接平面 $T_{\mathbf{x}_0}S$ からの曲面上の点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ の高さ $h(u, v)$ を計算しよう．

$$h(u, v) = (\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(u_0, v_0), \mathbf{n}(u_0, v_0))$$

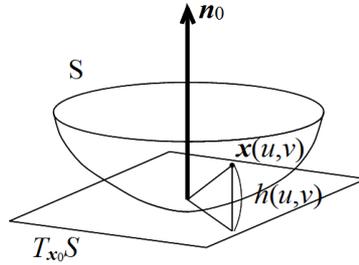


図 2.22: 高さ $h(u, v)$

いま $\mathbf{x}(u, v)$ をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(u_0, v_0) &= (u - u_0)\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + (v - v_0)\mathbf{x}_v(u_0, v_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u - u_0)^2\mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \\ &\quad + (u - u_0)(v - v_0)\mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(v - v_0)^2\mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \\ &\quad + \mathbf{o}((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2) \end{aligned}$$

となる． $\mathbf{n}(u_0, v_0)$ との内積をとれば

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n})(u - u_0)^2 + (\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n})(u - u_0)(v - v_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n})(v - v_0)^2 + o((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2) \\ &= \frac{1}{2}\{H_{11}(u - u_0)^2 + 2H_{12}(u - u_0)(v - v_0) + H_{22}(v - v_0)^2\} \\ &\quad + o((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2) \end{aligned}$$

を得る．ここで $\xi = (u - u_0)\mathbf{x}_u + (v - v_0)\mathbf{x}_v$ とおけば，次を得る．

$$h(u, v) = \frac{1}{2}\varphi(\xi) + o(\|\xi\|^2) \quad (2.11)$$

このように，第2基本形式は $2h(u, v)$ の2次の近似を与えている．

H_{ij} を \mathbf{x} の偏導関数で表してみよう．これ以降，簡単のために

$$\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}$$

等の代わりに

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{22}$$

等と記す．すると， H_{ij} は $H_{ij} = (\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{n})$ と表される．

$$\begin{aligned} H_{ij} &= (\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{n}) = \left(\mathbf{x}_{ij}, \frac{1}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \right) \\ &= \frac{(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} \\ &= \frac{\det(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} \end{aligned}$$

一般に

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対し

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\ &\quad - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_3a_1b_3b_1 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= \sum_{i < j} (a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2) - 2 \sum_{i < j} a_i a_j b_i b_j \\ &= \sum_i a_i^2 b_i^2 + \sum_{i < j} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) - \sum_i a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{i < j} a_i a_j b_i b_j \\ &= \left(\sum_i a_i^2 \right) \left(\sum_i b_i^2 \right) - \left(\sum_i a_i b_i \right)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 \|\mathbf{x}_2\|^2 - (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$$

ゆえに

$$H_{ij} = \frac{\det(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}} \quad (2.12)$$

と表される.

例 トーラス

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ (R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

であった. よって

$$g_{11} = r^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (R + r \cos u)^2$$

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = r(R + r \cos u)$$

である. さらに

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \\ -r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} r \sin u \sin v \\ -r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \cos v \\ -(R + r \cos u) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$H_{11} = r, \quad H_{12} = 0, \quad H_{22} = (R + r \cos u) \cos u$$

となる. したがって

$$\varphi = r(du)^2 + (R + r \cos u) \cos u (dv)^2$$

と表される. ここで, トーラスの外側の部分では,

- $\cos u$ が > 0 で, φ は正定値であり, 曲面が接平面の片側にある.
すなわち, 接平面は曲面に 1 点で接している.

となり, また, 逆に, トーラスの内側の部分では,

- $\cos u$ が < 0 で, φ は不定値であり, 曲面は接平面の上にも下にもある.
すなわち, 接平面は曲面をそくように切っている.

となることがわかった.

2.3.3 曲面の曲率と第2基本形式

曲面に含まれる曲線の曲率ベクトルを、曲面に垂直な成分と曲面に接する成分に分解して、それぞれの大きさを考えよう。\$S = \{x(u, v)\}\$ を \$C^r\$ 曲面とし、\$C \subset S\$、\$C = \{x(s)\}\$ を曲面 \$S\$ に含まれる \$C^r\$ 曲線とする。ここで、\$r \geq 2\$ で、\$s\$ は \$C\$ の弧長パラメータと仮定する。

$$e_1(s) = x'(s) \text{ 第1 Frenet 標構}$$

$$k(s) = e_1'(s) = x''(s) \text{ 曲率ベクトル}$$

であった。曲率ベクトルを接平面と法ベクトル方向の成分に分解する。

$$k(s) = k_g(s) + k_n(s), \quad k_g(s) \in T_{x(s)}S, \quad k_n(s) \perp T_{x(s)}S \quad (2.13)$$

それぞれを測地曲率ベクトル、法曲率ベクトルといい、それらの大きさを測地曲率 (geodesic curvature)、法曲率 (normal curvature) という。

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= (k(s), n_{x(s)}) \\ \kappa_g(s) &= (k(s), n_{x(s)} \times e_1(s)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

と表される。ただし、法曲率、測地曲率には法ベクトルの方向により符号を付けている。

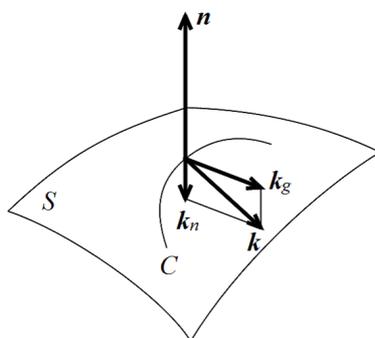


図 2.23: 測地曲率ベクトルと法曲率ベクトル

ここで、2.2.1の補題より、\$C^r\$ 関数 \$u(s), v(s)\$ が存在して、\$x(s) = x(u(s), v(s))\$ と表すことができる。すると、\$n_{x(s)} = n(u(s), v(s))\$ と書くことができる。したがって

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= (k(s), n_{x(s)}) = (k(s), n(u(s), v(s))) \\ &= (x''(s), n(u(s), v(s))) \end{aligned}$$

となる。一方、\$x'(s) \in T_{x(s)}S\$ より

$$(x'(s), n(u(s), v(s))) \equiv 0$$

である．この両辺を微分して

$$(\mathbf{x}''(s), \mathbf{n}(u(s), v(s))) + \left(\mathbf{x}'(s), \frac{d}{ds} \mathbf{n}(u(s), v(s)) \right) \equiv 0$$

となる．よって次式を得る．

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= (\mathbf{x}''(s), \mathbf{n}(u(s), v(s))) \\ &= - \left(\mathbf{x}'(s), \frac{d}{ds} \mathbf{n}(u(s), v(s)) \right) \\ &= - \left(\frac{d}{ds} \mathbf{x}(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} \mathbf{n}(u(s), v(s)) \right) \\ &= -(u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v, u'(s)\mathbf{n}_u + v'(s)\mathbf{n}_v) \\ &= -(u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v, d\mathbf{n}(u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v)) \\ &= \varphi(u'(s)\mathbf{x}_u + v'(s)\mathbf{x}_v) \\ &= \varphi(\mathbf{x}'(s)) \end{aligned}$$

すなわち

$$\kappa_n(s) = \varphi(\mathbf{x}'(s)) \quad (2.15)$$

が成り立つ．この式より，曲線の法曲率は曲線の向きだけで定まり，曲がり方，すなわち，2階微分にはよらないことがわかる．これは，法曲率はその方向の曲面の曲がり方を表しているからである．

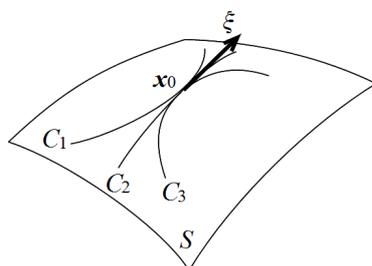
ここで， $\mathbf{x}_0 \in S$ での長さ 1 の接ベクトル $\xi \in T_{\mathbf{x}_0}S$, $\|\xi\| = 1$ に対して， S に含まれる曲線で， ξ を速度ベクトルとするものを考える．その曲率は $\kappa = \sqrt{(\kappa_n)^2 + (\kappa_g)^2}$ であるが，上の計算より

$$\kappa_n = \varphi(\xi)$$

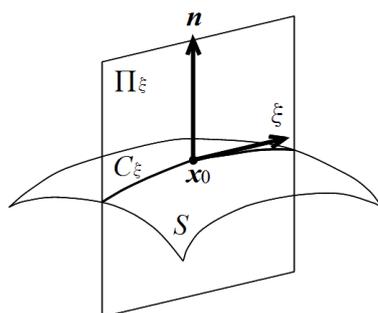
である．特に，その曲率について

$$\kappa \geq |\kappa_n| = |\varphi(\xi)|$$

が成り立つ．すなわち， S に含まれる曲線で ξ 方向のものは必ず曲率 $|\varphi(\xi)|$ だけは曲がっている．これは曲面が曲がっているために曲線が曲がらざるをえないことを表している．

図 2.24: ξ を速度ベクトルとする S に含まれる曲線たち

点 x_0 を通り, 法ベクトル n_{x_0} と接ベクトル ξ で生成される平面 Π_ξ を考える. 平面 Π_ξ で曲面を切断するときの切り口の曲線を C_ξ とする. C_ξ は ξ に接し, その曲率ベクトルは Π_ξ に含まれるから, 点 x_0 でその測地曲率は 0 になり, $\kappa = |\varphi(\xi)|$ である. すなわち, 第 2 基本形式 $\varphi(\xi)$ は, 上のようにして定まる曲線 C_ξ の曲率を与えているのである.

図 2.25: C_ξ の曲率

上の C_ξ は 1 点だけで測地曲率が 0 であるが, 測地曲率 κ_g が恒等的に 0 になる曲線を測地線 (geodesic) と呼ぶ. それはその曲面に含まれる曲線のうちで最も曲がり方の少ない曲線である.

第 2 基本形式は接平面上の線型変換 dn の定める 2 次形式であった.

補題 ガウス写像の 1 次近似 dn は $T_{x_0}S$ の対称変換である. すなわち, 任意の接ベクトル ξ, η に対して

$$(dn(\xi), \eta) = (\xi, dn(\eta))$$

が成り立つ.

証明 実際, 基底 $\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v \rangle$ に対して

$$\begin{aligned} (d\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_u), \boldsymbol{x}_v) &= (\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{x}_v) = -H_{12} = (\boldsymbol{n}_v, \boldsymbol{x}_u) \\ &= (d\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_v), \boldsymbol{x}_u) = (\boldsymbol{x}_u, d\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_v)) \end{aligned}$$

である.

ここで, 対称変換に関する次の定理は重要である.

定理 (復習) 対称変換には固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する.

$d\boldsymbol{n}$ は接平面の対称変換であるから, たがいに直交する長さが 1 の固有ベクトル ξ_1, ξ_2 がある. 固有値を $-\kappa_1, -\kappa_2$ とし, $\kappa_1 \leq \kappa_2$ とする. ベクトル ξ_1, ξ_2 は $T_{\boldsymbol{x}_0}S$ の正規直交基底になっている.

$$d\boldsymbol{n}(\xi_1) = -\kappa_1 \xi_1, \quad d\boldsymbol{n}(\xi_2) = -\kappa_2 \xi_2$$

ここで, 一般の接ベクトル $\xi = \lambda \xi_1 + \mu \xi_2$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= -(\xi, d\boldsymbol{n}(\xi)) \\ &= -(\lambda \xi_1 + \mu \xi_2, d\boldsymbol{n}(\lambda \xi_1 + \mu \xi_2)) \\ &= -(\lambda \xi_1 + \mu \xi_2, -\lambda \kappa_1 \xi_1 - \mu \kappa_2 \xi_2) \\ &= \lambda^2 \kappa_1 + \mu^2 \kappa_2 \end{aligned}$$

そのときの法曲率は

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \varphi \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \right) = \frac{1}{\|\xi\|^2} \varphi(\xi) = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} (\lambda^2 \kappa_1 + \mu^2 \kappa_2) \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \kappa_1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \kappa_2 \end{aligned}$$

したがって, 法曲率は, $\lambda = 0$ のとき, 最大値 κ_2 , $\mu = 0$ のとき, 最小値 κ_1 をとる.

$\kappa_1 = \kappa_2$ のとき, \boldsymbol{x}_0 を通る曲線の法曲率は, 曲線の向きによらず一定で, $\kappa_1 = \kappa_2$ である. そのとき, \boldsymbol{x}_0 を臍点 (せいてん) (umblic または umbilical point) と呼ぶ. また特に, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ のとき, \boldsymbol{x}_0 を平坦点 (flat point) と呼ぶことがある.

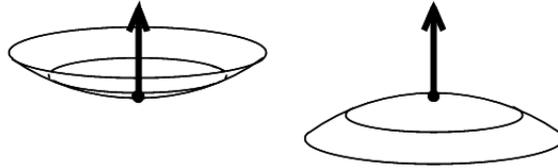


図 2.26: 臍点

$\kappa_1 < \kappa_2$ のとき, 法曲率は曲線の向きによりことなり, 接平面 $T_{x_0}S$ に, 直交する 2 つの方向 $\pm\xi_1, \pm\xi_2$ が定まって, $\pm\xi_1$ 方向で最小値 $\kappa_1, \pm\xi_2$ 方向で最大値 κ_2 をとる.

ここで

- κ_1, κ_2 が同符号のとき, x_0 を楕円点 (elliptic point)
- κ_1, κ_2 が異符号のとき, x_0 を双曲点 (hyperbolic point)
- κ_1, κ_2 の片方が 0 のとき, x_0 を放物点 (parabolic point)

という.

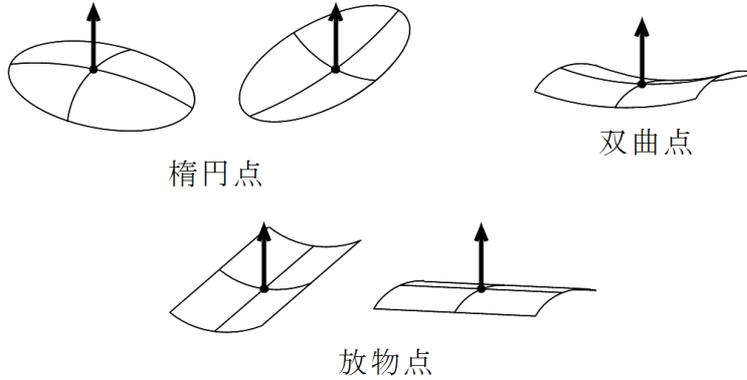


図 2.27: 楕円点, 双曲点, 放物点

さらに

- 法曲率が極値をとる方向 $\pm\xi_1, \pm\xi_2$ を主方向 (principal direction)
- 法曲率の極値 κ_1, κ_2 を主曲率 (principal curvature)
- S に含まれ, 各点で主方向に接している曲線を曲率線 (line of curvature)

という.

$T_{x_0}S$ の基底 x_u, x_v に関して, 線型変換 dn を表す行列を求めてみよう.
それを $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおくと

$$Ax_u = n_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v$$

$$Ax_v = n_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v$$

となり, x_u, x_v との内積をとると

$$-H_{11} = (n_u, x_u) = a_{11}(x_u, x_u) + a_{21}(x_v, x_u)$$

$$= a_{11}g_{11} + a_{21}g_{12}$$

$$-H_{12} = (n_u, x_v) = a_{11}(x_u, x_v) + a_{21}(x_v, x_v)$$

$$= a_{11}g_{12} + a_{21}g_{22}$$

$$-H_{21} = (n_v, x_u) = a_{12}(x_u, x_u) + a_{22}(x_v, x_u)$$

$$= a_{12}g_{11} + a_{22}g_{12}$$

$$-H_{22} = (n_v, x_v) = a_{12}(x_u, x_v) + a_{22}(x_v, x_v)$$

$$= a_{12}g_{12} + a_{22}g_{22}$$

が成り立つ. そこで $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}$ とおくと,
 $g_{21} = g_{12}$, $H_{21} = H_{12}$ となるから, 上の関係は

$$-\Phi = GA \quad \text{すなわち} \quad A = -G^{-1}\Phi$$

となることを示している.

$-\kappa_1, -\kappa_2$ は行列 $A = -G^{-1}\Phi$ の固有値であるから, κ_1, κ_2 は特性方程式 $\det(tI - G^{-1}\Phi) = 0$ すなわち

$$t^2 - \operatorname{tr}(G^{-1}\Phi)t + \det(G^{-1}\Phi) = 0 \quad (2.16)$$

の 2 解である.

定義 点 x_0 における曲面 S のガウス (Gauss) 曲率 (Gaussian curvature) または全曲率 (total curvature) K を式

$$K = \det(G^{-1}\Phi) = \kappa_1\kappa_2 \quad (2.17)$$

により定める. また, その平均曲率 (mean curvature) H を式

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(G^{-1}\Phi) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (2.18)$$

により定める.

ガウス曲率 K はガウス写像 $\Gamma : S \rightarrow S^2$ の面積の変換率である .

平均曲率 H は , 接平面に対する上と下への曲がり方の不つりあいの度合を表しているともいえる . H が恒等的に 0 な曲面は極小曲面 (minimal surface) といわれる .

それらは式

$$K = \det(G^{-1}\Phi) = \frac{\det \Phi}{\det G} = \frac{H_{11}H_{22} - (H_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \quad (2.19)$$

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(G^{-1}\Phi) = \frac{g_{11}H_{22} - 2g_{12}H_{12} + g_{22}H_{11}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} \quad (2.20)$$

により計算できる .

これらを用いれば , 主曲率は $t^2 - 2Ht + K = 0$ の 2 解として

$$\kappa_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.21)$$

と表される . さらに次が成り立つ .

- 点 x_0 が臍点である . $\iff H^2 = K$
- 点 x_0 が楕円点である . $\iff H^2 > K > 0$
- 点 x_0 が放物点である . $\iff K = 0$
- 点 x_0 が双曲点である . $\iff K < 0$

次も成り立つ .

臍点の条件 $\iff G^{-1}\Phi$ の 2 つの固有値がともに κ

$$\iff G^{-1}\Phi = \kappa I \quad \text{すなわち} \quad \Phi = \kappa G$$

$$\iff \frac{H_{11}}{g_{11}} = \frac{H_{12}}{g_{12}} = \frac{H_{22}}{g_{22}} = \kappa$$

最後に , 主方向 ξ を求める式を導こう . ξ は $G^{-1}\Phi$ の固有ベクトルである .

$$(\kappa I - G^{-1}\Phi)\xi = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad (\kappa G - \Phi)\xi = \mathbf{0}$$

ここで , $\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおけば , $\Phi\xi = \kappa G\xi$ より

$$H_{11}\alpha + H_{12}\beta = \kappa(g_{11}\alpha + g_{12}\beta)$$

$$H_{12}\alpha + H_{22}\beta = \kappa(g_{12}\alpha + g_{22}\beta)$$

を得る . κ を消去すると

$$(H_{11}\alpha + H_{12}\beta)(g_{12}\alpha + g_{22}\beta) = (H_{12}\alpha + H_{22}\beta)(g_{11}\alpha + g_{12}\beta)$$

が成り立ち、これより、主方向の傾き $m = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{dv}{du}$ の 2 次方程式を得る。

$$(g_{12}H_{22} - g_{22}H_{12}) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (g_{11}H_{22} - g_{22}H_{11}) \left(\frac{dv}{du}\right) + (g_{11}H_{12} - g_{12}H_{11}) = 0 \quad (2.22)$$

この式は曲率線の満たす微分方程式でもある。そこで、曲率線の方程式ともいう。

特に、 u 曲線、 v 曲線が曲率線になる必要十分条件は、 $g_{12} = H_{12} = 0$ である。

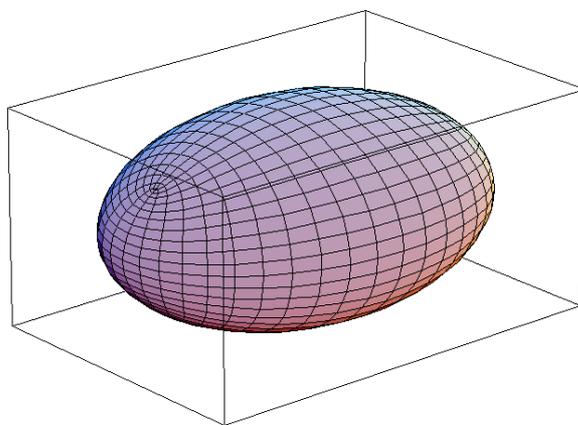


図 2.28: 楕円面の曲率線

例 (螺旋面と懸垂面) 螺旋面については

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ a \sinh u \sin v \\ av \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ a \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -a \sinh u \sin v \\ a \sinh u \cos v \\ a \end{pmatrix}$$

であった。これより

$$G = \begin{pmatrix} a^2 \cosh^2 u & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2 u \end{pmatrix}, \quad \det G = a^4 \cosh^4 u$$

となり、さらに

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ a \sinh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} -a \cosh u \sin v \\ a \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} -a \sinh u \cos v \\ -a \sinh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$H_{11} = H_{22} = 0, \quad H_{12} = -a$$

を得る．したがって

$$\varphi = -2a \, du \, dv, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det \Phi}{\det G} = \frac{-1}{a^2 \cosh^4 u}, \quad H \equiv 0$$

となる．特に，螺旋面は極小曲面である．曲率線の方程式は

$$a^3 \cosh^2 u \left(\left(\frac{dv}{du} \right)^2 - 1 \right) = 0$$

となるから， u 曲線， v 曲線に対し 45° の方向に主方向があることがわかる．懸垂面に対しても

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ a \cosh u \sin v \\ au \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ a \sinh u \sin v \\ a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -a \cosh u \sin v \\ a \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，第1基本形式については螺旋面と全く同じである．さらに

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ a \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} -a \sinh u \sin v \\ a \sinh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} -a \cosh u \cos v \\ -a \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，次式を得る．

$$H_{11} = -a, \quad H_{22} = a, \quad H_{12} = 0$$

$$\varphi = a \left(-(du)^2 + (dv)^2 \right), \quad \Phi = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

よって，第2基本形式は螺旋面と異なる．また

$$K = \frac{-1}{a^2 \cosh^4 u}, \quad H \equiv 0$$

であるから，懸垂面も極小曲面である．さらにここで， $g_{12} = H_{12} = 0$ であるから， u 曲線， v 曲線は曲率線である．

2.4 基本公式と基本方程式

2.4.1 基本公式

曲面 S 上の各点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ に対し, \mathbb{R}^3 の基底 $\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{n} \rangle$ が定まる. これらのベクトルの変化率すなわち偏導関数を $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{n}$ の 1 次結合で表し, その係数を求めよう.

記法を簡単にするために変数 u, v のかわりに u_1, u_2 を用い,

$$\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{x}_{uu}, \boldsymbol{x}_{uv}, \boldsymbol{x}_{vv}, \boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v$$

等のかわりに

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_{22}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$$

等で表す. すると

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \\ H_{ij} &= (\boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{n}) = -(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{n}_j) = -(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{n}_i) \end{aligned}$$

と表される. ここで, $g_{ij} = g_{ji}, H_{ij} = H_{ji}$ が成り立っている. さらに, G^{-1} の (i, j) 成分を g^{ij} で表そう.

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\det G}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{\det G}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{\det G}$$

今, \boldsymbol{x}_{jk} を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{n}$ の 1 次結合で表して

$$\boldsymbol{x}_{jk} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \boldsymbol{x}_i + \Gamma_{jk} \boldsymbol{n}$$

とおく. $\boldsymbol{x}_{jk} = \boldsymbol{x}_{kj}$ より $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i, \Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$ である. \boldsymbol{n} との内積をとれば

$$H_{jk} = (\boldsymbol{x}_{jk}, \boldsymbol{n}) = \sum_i \Gamma_{jk}^i (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{n}) + \Gamma_{jk} (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$$

が成り立つ. よって

$$\Gamma_{jk} = H_{jk}$$

を得る. 前々式と \boldsymbol{x}_l との内積をとると

$$(\boldsymbol{x}_{jk}, \boldsymbol{x}_l) = \sum_i \Gamma_{jk}^i (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_l) = \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il}$$

である. 一方, ここで $g_{jl} = (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_l)$ の両辺を $\frac{\partial}{\partial u_k}$ して, 次式を得る.

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_k} = (\boldsymbol{x}_{jk}, \boldsymbol{x}_l) + (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_{lk}) = \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il} + \sum_i \Gamma_{lk}^i g_{ij}$$

j と k を入れ替えて, 形を変える.

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u_j} = \sum_i \Gamma_{kj}^i g_{il} + \sum_i \Gamma_{lj}^i g_{ik}$$

さらに, j と l を入れ替えて, 次式を得る.

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial u_l} = \sum_i \Gamma_{kl}^i g_{ij} + \sum_i \Gamma_{jl}^i g_{ik}$$

$\Gamma_{j^i k}^i = \Gamma_{kj}^i$ に注意して, 右边を整理すると

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} = 2 \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il}$$

を得る. g^{lm} を掛けて, l に関して和をとると

$$\sum_l g^{lm} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \right) = 2\Gamma_{jk}^m$$

となる. すなわち

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \right) \quad (2.23)$$

が成り立つ. この Γ_{jk}^i をクリストフェルの記号 (Christoffel's symbol) という. これを用いて

$$\mathbf{x}_{jk} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \mathbf{x}_i + H_{jk} \mathbf{n} \quad (2.24)$$

と表すことができる. これをガウス (Gauss) の公式という.

次に, \mathbf{n} の変化率を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}$ の一次結合で表そう. $d\mathbf{n}$ を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$\mathbf{n}_k = d\mathbf{n}(\mathbf{x}_k) = \sum_i a_{ik} \mathbf{x}_i$$

で, $A = -G^{-1}\Phi$ であった. したがって

$$\mathbf{n}_k = \sum_i a_{ik} \mathbf{x}_i = - \sum_{i,j} g^{ij} H_{jk} \mathbf{x}_i$$

となる. ゆえに

$$\mathbf{n}_k = - \sum_{i,j} H_{ki} g^{ij} \mathbf{x}_j \quad (2.25)$$

が得られる. これをワインガルテン (Weingarten) の公式という.

基底 $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle$ を u_1, u_2 で偏微分したものを, それらの1次結合で表すとき, 係数は $\Gamma_{jk}^i, H_{jk}, g^{ij}$ 等で表され, それらはすべて g_{ij}, H_{ij} とその偏微分で表される. すなわち, ガウスの公式とワインガルテンの公式は, 曲線論のフルネ・セレの公式にあたるものといえる.

2.4.2 基本方程式

これ以降, 曲面は $C^r (r \geq 3)$ と仮定する.
ガウスの公式を偏微分する.

$$\mathbf{x}_{jkl} = \sum_i \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u_l} \mathbf{x}_i + \sum_i \Gamma_{jk}^i \mathbf{x}_{il} + \frac{\partial H_{jk}}{\partial u_l} \mathbf{n} + H_{jk} \mathbf{n}_l$$

右辺にガウスの公式, ワインガルテンの公式を代入する.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{jkl} &= \sum_i \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u_l} \mathbf{x}_i + \sum_{i,h} \Gamma_{jk}^i \Gamma_{il}^h \mathbf{x}_h + \sum_i \Gamma_{jk}^i H_{il} \mathbf{n} + \frac{\partial H_{jk}}{\partial u_l} \mathbf{n} \\ &\quad - \sum_{i,h} H_{jk} H_{li} g^{ih} \mathbf{x}_h \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u_l} + \sum_h \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \sum_h H_{jk} H_{lh} g^{hi} \right) \mathbf{x}_i \\ &\quad + \left(\frac{\partial H_{jk}}{\partial u_l} + \sum_i \Gamma_{jk}^i H_{il} \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_{jkl} = \mathbf{x}_{jlk}$ より, \mathbf{x}_i の係数を比べると, 次式を得る.

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u_l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u_k} \right) + \sum_h (\Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i) = \sum_h (H_{jk} H_{lh} - H_{jl} H_{kh}) g^{hi}$$

これに g_{im} を掛けて, i に関して和をとる.

$$\begin{aligned} &H_{jk} H_{lm} - H_{jl} H_{km} \\ &= \sum_i g_{im} \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u_l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u_k} \right) + \sum_h (\Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i) \right\} \quad (2.26) \end{aligned}$$

左辺は H_{ij} の式, 右辺は g_{ij} の式である.

今まで, g_{ij}, H_{ij} たちは, 相互に関係していることは予想できるが, その間の関係を式に表せたのは, これがはじめてである. ガウス (Gauss) の基本方程式という.

定理 3 (Theorema egregium) ガウス曲率 K は第 1 基本形式だけで定まり, 第 2 基本形式には依らない. 特に曲面の間に等長変換があれば対応する点のガウス曲率は等しい.

実際, 前式において, $j = k = 1, l = m = 2$ のとき, $\det \Phi = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{12}$ は g_{ij} 達の式で表される. したがって, 特にガウス曲率 $K = \frac{\det \Phi}{\det G}$ も g_{ij} の式で表される.

この事実も C. F. ガウスにより発見された.

$x_{jkl} = x_{jlk}$ において, n の係数を比べると

$$\frac{\partial H_{jk}}{\partial u_l} - \frac{\partial H_{jl}}{\partial u_k} + \sum_i (\Gamma_{jk}^i H_{il} - \Gamma_{jl}^i H_{ik}) = 0 \quad (2.27)$$

が得られる. この式も g_{ij}, H_{ij} たちの間の関係を表す微分方程式である. マイナルディ・コダッチ (Mainardi-Codazzi) の基本方程式という.

同様に, ワインガルテンの公式を偏微分し, 右辺にガウスの公式, ワインガルテンの公式を代入し, $n_{kl} = n_{lk}$ より, x_i, n の係数を比べると, g_{ij}, H_{ij} たちの間の関係を表す微分方程式が得られるが, それは新しいものではなく, マイナルディ・コダッチの基本方程式が再び得られるだけである.

2.5 曲面論の基本定理

2.5.1 問題の設定と基本定理

曲面 $S = \{x(u, v)\}$ に対し, いくつかの, 曲面の形状を表す量を考えてきたが, これらはすべて, 第1基本形式と第2基本形式により表すことができた. この2つの基本形式は6つの関数

$$\begin{aligned} g_{11}(u, v), \quad g_{12}(u, v), \quad g_{22}(u, v), \\ H_{11}(u, v), \quad H_{12}(u, v), \quad H_{22}(u, v) \end{aligned}$$

で表される. これに関して, 次の問題を考えることができる.

問題 2変数 u, v の関数として, 6つの関数 $g_{ij}(u, v), H_{ij}(u, v)$ がすべて一致するような2つの曲面は, 回転と平行移動によりぴたりと重ねることができるか. すなわち, 合同であるか.

このことが正しいとすると, 曲面の形状を記述するものは第1, 第2の基本形式だけで十分であることが期待される.

問題 2変数 u, v の6つの関数 $g_{ij}(u, v), H_{ij}(u, v)$ が与えられたとき, それらを第1基本形式, 第2基本形式とするような曲面は存在するか.

ここで, g_{ij}, H_{ij} たち6つの関数は任意の関数ではいけない. 曲面の第1, 第2基本形式ならば必ず満たすであろう条件は, 満たしていなければならない.

まず第一に, 第1基本形式は正定値でなければならない. それは, 次式で与えられる.

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0$$

また, ガウスの基本方程式とマイナルディ・コダッチの基本方程式を満たさなければならない.

ここで、これらの条件の下で問題 2 が成り立つとすると、 g_{ij}, H_{ij} たちの間に上の 2 つの基本方程式以外に新たな関係がないこともわかる。2 つの基本方程式さえ満たせば曲面が存在するからである。

問題 1, 2 は次の形で成り立つ。

定理 4 (曲面論の基本定理 (一意性)) $r \geq 2$ とする。 uv 平面の領域 D 上にパラメータを持つ 2 つの C^r 曲面が同じ第 1, 第 2 基本形式を持つとき、それらは合同である。

定理 5 (曲面論の基本定理 (存在))(ボネ (Bonnet) の定理) $r \geq 3$ とする。 uv 平面の円板領域 D_0 上に 6 つの関数

$$g_{ij}(u, v), \quad H_{ij}(u, v) \quad (1 \leq i \leq j \leq 2)$$

が与えられて、 g_{ij} は C^{r-1} , H_{ij} は C^{r-2} だとする。さらに、 g_{ij} は正定値 2 次形式を定義し、6 つの関数はガウスの基本方程式、マイナルディ・コダッチの基本方程式を満たすとする。そのとき D_0 上にパラメータを持つ C^r 曲面 S で g_{ij}, H_{ij} を第 1, 第 2 基本形式とするものが存在する。

2.5.2 1 階線型偏微分方程式

これらの定理の証明の主な部分は微分方程式の理論である。どのような微分方程式を考えればいいのだろう。

既知関数は g_{ij}, H_{ij} およびそれらの式で、たとえば、 g^{ij} や Γ_{jk}^i も既知関数である。

未知関数は $\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix}$ であるが、その偏導関数 x_u, x_v も、

さらに、それらの式 $\mathbf{n} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ も未知関数であると考える。

記号の節約のために、独立変数 u, v のかわりに u_1, u_2 を用い x_u, x_v のかわりに、 x_1, x_2 を用いる。

これらの関数の間の関係は

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \mathbf{x}_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial u_i} = \sum_k \Gamma_{ji}^k \mathbf{x}_k + H_{ji} \mathbf{n} \quad (\text{ガウスの公式})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} = - \sum_k \left(\sum_j H_{ij} g^{jk} \right) \mathbf{x}_k \quad (\text{ワインガルテンの公式})$$

で与えられている．これらの式の左辺は未知関数の偏導関数で，右辺は既知関数を係数とする未知関数の 1 次式である．未知関数をすべて並べて

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix}$$

とおくと， $\tilde{\boldsymbol{x}}$ は 12 次元ベクトルで，その偏微分を計算すると

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \Gamma_{1i}^1 \boldsymbol{x}_1 + \Gamma_{1i}^2 \boldsymbol{x}_2 + H_{1i} \boldsymbol{n} \\ \Gamma_{2i}^1 \boldsymbol{x}_1 + \Gamma_{2i}^2 \boldsymbol{x}_2 + H_{2i} \boldsymbol{n} \\ - \left(\sum_j H_{ij} g^{j1} \right) \boldsymbol{x}_1 - \left(\sum_j H_{ij} g^{j2} \right) \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$$

となる．ここで 12 次正方行列 \tilde{A}_i を

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} O & \delta_{1i} I_3 & \delta_{2i} I_3 & O \\ O & \Gamma_{1i}^1 I_3 & \Gamma_{1i}^2 I_3 & H_{1i} I_3 \\ O & \Gamma_{2i}^1 I_3 & \Gamma_{2i}^2 I_3 & H_{2i} I_3 \\ O & - \left(\sum_j H_{ij} g^{j1} \right) I_3 & - \left(\sum_j H_{ij} g^{j2} \right) I_3 & O \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

とおくと，その各成分は u_1, u_2 の C^{r-2} 関数で，それにより

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial u_1} = \tilde{A}_1 \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial u_2} = \tilde{A}_2 \tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

と表される．

この 2 つの式のそれぞれは，微分しない方の変数を固定するとき，もう 1 つの変数に関する 1 階の線型常微分方程式になっている．第 1 式は $u_2 = u_{20}$ を固定すれば， $f = f(u_1)$ に関する常微分方程式

$$(**) \quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{f}}}{du_1} = \tilde{A}_1(u_1, u_{20}) \tilde{\boldsymbol{f}}$$

であると考えることができる．

補題 (方程式 (*) の解の一意性) 領域 D 上の 2 つの 12 次元ベクトル値関数

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(u_1, u_2), \quad \tilde{\boldsymbol{x}}'(u_1, u_2)$$

が方程式 (*) の解であるとし, D の内部の任意の点 (u_{10}, u_{20}) に対し, 初期値

$$\tilde{x}(u_{10}, u_{20}) = \tilde{x}'(u_{10}, u_{20}) = \tilde{x}_0$$

が一致したとする. このとき, D 全体で

$$\tilde{x}(u_1, u_2) = \tilde{x}'(u_1, u_2)$$

が成り立つ.

証明 $u_2 = u_{20}$ を固定して $\tilde{x}(u_1, u_{20}), \tilde{x}'(u_1, u_{20})$ を u_1 の関数と思うと, これらは, $u_1 = u_{10}$ で同じ初期値を持つ (*) の第 1 式の解であるから, 少なくとも

$$u_{10} - \varepsilon < u_1 < u_{10} + \varepsilon$$

の範囲で

$$\tilde{x}(u_1, u_{20}) = \tilde{x}'(u_1, u_{20})$$

が成り立つ.

さらに, この範囲で u_1 を固定して u_2 の関数だと思うと, $u_2 = u_{20}$ における初期値が一致するような (*) の第 2 式の解であるから, ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$u_{10} - \varepsilon < u_1 < u_{10} + \varepsilon$$

$$u_{20} - \varepsilon < u_2 < u_{20} + \varepsilon$$

の範囲で

$$\tilde{x}(u_1, u_2) = \tilde{x}'(u_1, u_2)$$

が成り立つことになる.

この議論は初期パラメータ (u_{10}, u_{20}) の位置に依らないから, ある点 (u_1, u_2) で, $\tilde{x}(u_1, u_2) = \tilde{x}'(u_1, u_2)$ が成り立てば, その点の近傍で $\tilde{x} \equiv \tilde{x}'$ が成り立つことがわかる.

すなわち, $\tilde{x}(u_1, u_2) = \tilde{x}'(u_1, u_2)$ の成り立つ点の全体は D の開集合である. この集合は, また, 明らかに D の閉集合でもあるから, 連結性より, D 全体と一致する.

方程式 (*) を解くことを考えてみる. ただし, ここで, 点 (u_1, u_2) の動く範囲は (u_{10}, u_{20}) を中心とする半径 ε の円板 D_0 の内部とし (u_{10}, u_{20}) を始点とする初期値問題を考える.

初期値としては, 任意の 12 次元ベクトル \tilde{x}_0 をとる. $u_2 = u_{20}$ を固定すると, (*) の第 1 式は u_1 を独立変数とする線型常微分方程式

$$\frac{d\tilde{f}}{du_1} = \tilde{A}_1(u_1, u_{20})\tilde{f}$$

であるから，初期条件

$$\tilde{f}(u_{10}) = \tilde{x}_0$$

を満たす解 $\tilde{f}(u_1)$ が一意的存在する．

したがって，(*) の解 $\tilde{x}(u_1, u_2)$ は $\tilde{x}(u_1, u_{20}) = \tilde{f}(u_1)$ を満たさなければならない．

次に， u_1 を $u_{10} - \varepsilon < u_1 < u_{10} + \varepsilon$ を満たす任意の u_1 に固定して，(*) の第 2 式を u_2 に関する線型常微分方程式と思う．

これもまた，任意の初期値に対して一意に解をもつ．そこで， $u_2 = u_{20}$ での初期値を $\tilde{f}(u_1)$ とする解を $\tilde{x}(u_1, u_2)$ とおく．

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_2} = \tilde{A}_2 \tilde{x} \\ \tilde{x}(u_1, u_{20}) = \tilde{f}(u_1) \end{cases}$$

すると， \tilde{x} は D_0 上の各点で定まり， u_2 の関数として C^{r-1} で， (u_1, u_2) の関数としては C^{r-2} であり，各点で，(*) の第 2 式を満たし， $u_2 = u_{20}$ のところで (*) の第 1 式を満たす．

問題は， $u_2 \neq u_{20}$ のとき，(*) の第 1 式を満たすかどうかだが，これは今までの議論からではわからない．というのは，(*) の式の \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 を，今与えられているものでなく，いい加減に選ぶと，上のように求めた解は第 1 式を満たすとはかぎらないからである．このとき，(*) に，もし解が存在するならば，それはいま求めた \tilde{x} と一致するはずであるから，(*) には解が存在しないことになる．ようするに，(*) の形方程式には解が存在しないことがある．

方程式 (*) に解が存在するための条件は何であるか考えてみよう．まず， $r \geq 3$ と仮定し，(*) の両辺は少なくとも C^1 級であるとして，第 1 式を $\frac{\partial}{\partial u_2}$ ，第 2 式を $\frac{\partial}{\partial u_1}$ してみよう．すると

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} \tilde{x} + \tilde{A}_1 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u_1} \tilde{x} + \tilde{A}_2 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1} \end{cases}$$

となる．この式に (*) を代入すると

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} \tilde{x} + \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{x} \\ \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u_1} \tilde{x} + \tilde{A}_2 \tilde{A}_1 \tilde{x} \end{cases}$$

2 式の差をとると，“行列 \times ベクトル = 0”の形に書ける．

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u_1} + \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - \tilde{A}_2 \tilde{A}_1 \right) \tilde{x} = \mathbf{0}$$

ここで, 各 (u_1, u_2) に対し, 初期値 \tilde{x}_0 がすべてのベクトルを動かるとき, $\tilde{x}(u_1, u_2)$ もすべてのベクトルを動く.

したがって, 方程式 (*) がすべての初期値に対して解けるためには, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 に関する条件

$$\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u_1} + \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - \tilde{A}_2 \tilde{A}_1 \equiv 0 \quad (2.28)$$

を満たしていなければならない. この条件を, 方程式 (*) の積分可能条件 (integrability condition) という.

補題 (積分可能条件) 方程式 (*) が積分可能条件を満たすとき, 上に述べたような初期値問題は, 任意の初期値 \tilde{x}_0 に対して, 解をもつ.

証明 前に求めた $\tilde{x}(u_1, u_2)$ が D_0 上で第 1 式を満たすことを見ればよい. そこで

$$\tilde{y}(u_1, u_2) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1}(u_1, u_2) - \tilde{A}_1(u_1, u_2)\tilde{x}(u_1, u_2)$$

とおくとき, $\tilde{y}(u_1, u_2) \equiv 0$ を示せば十分である. 構成より $\tilde{y}(u_1, u_2) = 0$ である. ここで, $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial u_2}$ を計算してみる. \tilde{x} は (*) の第 2 式は満たすから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u_2} &= \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} \tilde{x} - \tilde{A}_1 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1} (\tilde{A}_2 \tilde{x}) - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} \tilde{x} - \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{x} \\ &= \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u_1} \tilde{x} + \tilde{A}_2 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} + \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \right) \tilde{x} \\ &= \tilde{A}_2 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial u_1} + \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \right) \tilde{x} \\ &= \tilde{A}_2 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_1} - \tilde{A}_2 \tilde{A}_1 \tilde{x} \\ &= \tilde{A}_2 \tilde{y} \end{aligned}$$

よって, \tilde{y} もまた (*) の第 2 式の解であることがわかった. ここで, u_1 を固定すれば, \tilde{y} は u_2 に関する 1 階線型常微分方程式の解であり, しかも, $u_2 = u_{20}$ における初期値は 0. したがって, $\tilde{y} \equiv 0$ である.

2.5.3 基本定理の証明

証明 (基本定理の証明 (一意性)) 領域 D 上にパラメータをもつ 2 つの曲面

$$S = \{\mathbf{x}(u_1, u_2)\}, \quad S' = \{\mathbf{x}'(u_1, u_2)\}$$

のそれぞれの第 1, 第 2 基本形式がすべて等しいとする .

$$g_{ij}(u_1, u_2) \equiv g'_{ij}(u_1, u_2), \quad H_{ij}(u_1, u_2) \equiv H'_{ij}(u_1, u_2)$$

D の内部に 1 点 (u_{10}, u_{20}) を任意に選ぶ .

第 1 基本形式は等しいから , $x(u_{10}, u_{20})$ における 2 つの接ベクトル

$$x_1(u_{10}, u_{20}), \quad x_2(u_{10}, u_{20})$$

は , $x'(u_{10}, u_{20})$ における 2 つの接ベクトル

$$x'_1(u_{10}, u_{20}), \quad x'_2(u_{10}, u_{20})$$

と長さ , 角度ともに等しい . そこで , 回転と平行移動により S' を動かして

$$x(u_{10}, u_{20}) = x'(u_{10}, u_{20})$$

$$x_1(u_{10}, u_{20}) = x'_1(u_{10}, u_{20})$$

$$x_2(u_{10}, u_{20}) = x'_2(u_{10}, u_{20})$$

とすることができる . そのとき

$$n(u_{10}, u_{20}) = n'(u_{10}, u_{20})$$

でもある .

そのようにしたあとで , S および S' に対応する 12 次元ベクトルを $\tilde{x}(u_1, u_2)$, $\tilde{x}'(u_1, u_2)$ とおくと , これらは同じ方程式 (*) の解で , (u_{10}, u_{20}) における初期値

$$\tilde{x}(u_{10}, u_{20}) = \tilde{x}'(u_{10}, u_{20})$$

が一致する .

ここで , 方程式 (*) の解の一意性を適用すると , D 上で $\tilde{x} \equiv \tilde{x}'$ となり , 特に , はじめの 3 つの成分を見れば , $x(u_1, u_2) \equiv x'(u_1, u_2)$ である . これは回転と平行移動をした後に , S と S' がびたりと重なることを示している .

証明 (基本定理の証明 (存在)) 12 次元ベクトル \tilde{x} の成分を 3 つずつ 4 つのベクトルに分けて

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおくと(*)の第1式, 第2式はそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u_1} = y \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} = \Gamma_{11}^1 y + \Gamma_{11}^2 z + H_{11} w \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} = \Gamma_{21}^1 y + \Gamma_{21}^2 z + H_{21} w \\ \frac{\partial w}{\partial u_1} = - \sum_j H_{1j} g^{j1} y - \sum_j H_{1j} g^{j2} z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u_2} = z \\ \frac{\partial y}{\partial u_2} = \Gamma_{12}^1 y + \Gamma_{12}^2 z + H_{12} w \\ \frac{\partial z}{\partial u_2} = \Gamma_{22}^1 y + \Gamma_{22}^2 z + H_{22} w \\ \frac{\partial w}{\partial u_2} = - \sum_j H_{2j} g^{j1} y - \sum_j H_{2j} g^{j2} z \end{array} \right.$$

と表される.

ここで, その積分可能条件は次の2つの式

- 第1式を $\frac{\partial}{\partial u_2}$ し, 第2式を代入したもの
- 第2式を $\frac{\partial}{\partial u_1}$ し, 第1式を代入したもの

の差の係数 = 0 とおいたものである.

それは, 1行目では

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u_2} &= \Gamma_{12}^1 y + \Gamma_{12}^2 z + H_{12} w \\ &= \frac{\partial z}{\partial u_1} = \Gamma_{21}^1 y + \Gamma_{21}^2 z + H_{21} w \end{aligned}$$

という式になり $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, $H_{ij} = H_{ji}$ より無条件で成り立つ.

2行目および3行目からは y, z の係数としてガウスの基本方程式が, w の係数からはマイナルディ・コダッチの基本方程式が得られ, それらが成り立つことは仮定している.

4行目の式に対応する条件は計算しなかったが, ふたたびマイナルディ・コダッチの基本方程式が得られる.

以上のことから、曲面論の基本定理にともなう微分方程式(*)の積分可能条件はガウスおよびマイナルディ・コダッチの基本方程式であることがわかった。

前補題より、微分方程式系(*)が、任意の初期値に対して、 D_0 上で一意的に解を持つことが示された。

次に、示すべきことは、この解は我々の求めている曲面を与えているだろうか、すなわち、解のはじめの3つの成分である $\{x(u_1, u_2)\}$ は g_{ij} , H_{ij} を第1, 第2基本形式とする C^r 曲面になるかどうかである。

それを式で表せば

$$g_{ij} = (x_i, x_j), \quad H_{ij} = (x_{ij}, n)$$

が成り立つかということである。

仮定より、行列 $G = (g_{ij})$ は正則であるから、この第1の式が成り立てば、 x_1 と x_2 は1次独立になり、 x は曲面を表している。

(*)の係数は C^{r-2} であるからその解の成分 x, y, z, w は少なくとも C^{r-2} はある。

いま、方程式の1行目より、 $x_1 = y, x_2 = z$ であるから、方程式の2行目, 3行目はまとめて

$$x_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k + H_{ij} w$$

と表され、この式の右辺は C^{r-2} である。したがって、 x は C^r であることがわかる。また、もしも関係 $w = n$ が成り立てば、この式と n との内積をとることにより、 $H_{ij} = (x_{ij}, n)$ が従う。

したがって、次の式が示されれば証明は完了する。

$$g_{ij} = (x_i, x_j), \quad w = n$$

これらが成り立つためには、正しい初期値 \tilde{x}_0 をとらねばならない。ここで

$$\tilde{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

を

$$(y_0, y_0) = g_{11}(u_{10}, u_{20})$$

$$(y_0, z_0) = g_{12}(u_{10}, u_{20})$$

$$(z_0, z_0) = g_{22}(u_{10}, u_{20})$$

$$w_0 = \frac{1}{\|y_0 \times z_0\|} y_0 \times z_0$$

となるように選ぶ。これはいつでも可能である。

この条件を満たす初期値 \tilde{x}_0 に対して, (*) の解と, その3つずつの成分 x, y, z, w を得る。

すると, (*) の第1式より, $y = x_1, z = x_2$ である。

ここで, 関数 f, f_i, f_{ij} を

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2) &= (\mathbf{w}(u_1, u_2), \mathbf{w}(u_1, u_2)) - 1 \\ f_i(u_1, u_2) &= (\mathbf{w}(u_1, u_2), \mathbf{x}_i(u_1, u_2)) \\ f_{ij}(u_1, u_2) &= (\mathbf{x}_i(u_1, u_2), \mathbf{x}_j(u_1, u_2)) - g_{ij}(u_1, u_2) \end{aligned}$$

とおく。

これらの関数が (u_{10}, u_{20}) で $= 0$ であるとき, 円板領域 D_0 全体で $\equiv 0$ となることを示せば十分である。導関数を調べてみる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - 1\} = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}, \mathbf{w} \right) = 2 \left(- \sum_{j,k} H_{ij} g^{jk} \mathbf{x}_k, \mathbf{w} \right) \\ &= -2 \sum_{j,k} H_{ij} g^{jk} f_k \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} (\mathbf{w}, \mathbf{x}_j) = \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}, \mathbf{x}_j \right) + \left(\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial u_i} \right) \\ &= \left(- \sum_{k,l} H_{ik} g^{kl} \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j \right) + \left(\mathbf{w}, \sum_k \Gamma_{ji}^k \mathbf{x}_k + H_{ji} \mathbf{w} \right) \\ &= - \sum_{k,l} H_{ik} g^{kl} (f_{lj} + g_{lj}) + \sum_k \Gamma_{ji}^k f_k + H_{ji} (f + 1) \\ &= H_{ji} f + \sum_k \Gamma_{ji}^k f_k - \sum_{k,l} H_{ik} g^{kl} f_{lj} \\ \frac{\partial f_{jk}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) - g_{jk}\} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial u_i}, \mathbf{x}_k \right) + \left(\mathbf{x}_j, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_i} \right) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \\ &= \left(\sum_l \Gamma_{ji}^l \mathbf{x}_l + H_{ji} \mathbf{w}, \mathbf{x}_k \right) + \left(\mathbf{x}_j, \sum_l \Gamma_{ki}^l \mathbf{x}_l + H_{ki} \mathbf{w} \right) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \end{aligned}$$

ここで, Γ_{jk}^i の定義式を思いだしてみると

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \sum_l \Gamma_{ji}^l g_{lk} + \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj}$$

を得るから，前式に代入すると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{jk}}{\partial u_i} &= \sum_l \Gamma_{ji}^l(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k) + H_{ji}(\mathbf{w}, \mathbf{x}_k) + \sum_l \Gamma_{ki}^l(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j) + H_{ki}(\mathbf{w}, \mathbf{x}_j) \\
 &\quad - \sum_l \Gamma_{ji}^l g_{lk} - \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj} \\
 &= \sum_l \Gamma_{ji}^l (f_{lk} + g_{lk}) + H_{ji} f_k - \sum_l \Gamma_{ji}^l g_{lk} \\
 &\quad + \sum_l \Gamma_{ki}^l (f_{lj} + g_{lj}) + H_{ki} f_j - \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj} \\
 &= \sum_l \Gamma_{ji}^l f_{lk} + \sum_l \Gamma_{ki}^l f_{lj} + H_{ji} f_k + H_{ki} f_j
 \end{aligned}$$

となる．まとめると

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u_i} = -2 \sum_{j,k} H_{ij} g^{jk} f_k \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_i} = H_{ji} f + \sum_k \Gamma_{ji}^k f_k - \sum_{k,l} H_{ik} g^{kl} f_{lj} \\ \frac{\partial f_{jk}}{\partial u_i} = \sum_l \Gamma_{ji}^l f_{lk} + \sum_l \Gamma_{ki}^l f_{lj} + H_{ji} f_k + H_{ki} f_j \end{array} \right.$$

これらの式の左辺は，6つの関数 f, f_i, f_{ij} の変数 u_1, u_2 に関する偏導関数で，右辺はそれらの斉次1次式である．すなわち

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f \\ f_1 \\ f_2 \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$$

を未知関数とする(*)の形の微分方程式である．この形の方程式の初期値問題は，解が存在すれば一意であるから，点 (u_{10}, u_{20}) で $\tilde{\mathbf{0}}$ となる解は $\equiv \tilde{\mathbf{0}}$ だけである．したがって， $\tilde{\mathbf{f}}$ は D_0 全体で $\tilde{\mathbf{0}}$ になり， $\mathbf{x}(u_1, u_2)$ は求める解であることがわかった．

2.6 測地線と極小曲面

2.6.1 測地線

曲面上で2点を結ぶ最短の曲線が存在するとして，その曲線が満たすべき方程式を求めよう．さらに，そのような曲線は測地線，すなわち，測地曲率

が恒等的に 0 の曲線，であることを示す． u_1, u_2 をパラメータとする曲面を $\{x(u_1, u_2)\}$ とし，その上の曲線を $\{\gamma(t) = x(u_1(t), u_2(t)) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ とおく． $P = \gamma(t_1), Q = \gamma(t_2)$ とする． P, Q を固定し， γ を動かすとき， γ の長さ l について調べよう．曲線 γ の長さ l は次式で与えられる．

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt}} dt \quad (2.29)$$

P, Q を結ぶ曲線 γ を S 内で少し動かしたものを $\tilde{\gamma}$ とする．次のように表すことができる．

$$\tilde{\gamma}(t) = x(\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)), \quad \tilde{u}_i(t) = u_i(t) + \lambda v_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

ここで， λ は実パラメータで，0 の近くを動かすことにより， γ をなめらかに変形することができる．また，変位 $v_1(t), v_2(t)$ をいろいろ選ぶことにより， γ を任意の曲線に変えることができる．ただし，端点 P, Q は動かさないとする．そのことは

$$v_i(t_1) = v_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

と表される． $\tilde{\gamma}$ の長さ \tilde{l} は

$$\tilde{l} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt}} dt$$

で与えられる．

今， γ を P, Q を結ぶ最短の曲線だとする．すると

$$l \leq \tilde{l}$$

である．さらに， $\tilde{l} = \tilde{l}(\lambda)$ を λ の関数と思う． $\lambda = 0$ のとき， $\tilde{l} = l$ であるから， $\tilde{l}(\lambda)$ は $\lambda = 0$ で最小をとる．したがって

$$\frac{d\tilde{l}}{d\lambda}(0) = 0$$

とならねばならない．このことから，最短曲線 γ が満たすべき方程式が導かれる．後の計算の簡単のために， $\gamma(t)$ は弧長パラメータをもつと仮定する．したがって

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt}} = 1$$

が成り立っている．あとは，計算である．

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\tilde{l}}{d\lambda}(0) \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left[\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt}} dt \right] \Big|_{\lambda=0} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\lambda} \left[\sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt}} \right] dt \Big|_{\lambda=0} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{d}{d\lambda} \left[\sum_{jk} g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt} \right]}{2\sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt}}} dt \Big|_{\lambda=0} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sum_{jk} \frac{d}{d\lambda} \left[g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt} \right] \Big|_{\lambda=0}}{2\sqrt{\sum_{jk} g_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt}}} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jk} \frac{d}{d\lambda} \left[g_{jk} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \frac{d\tilde{u}_k}{dt} \right] \Big|_{\lambda=0} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{jk} \left\{ \frac{d}{d\lambda} [g_{jk}] \Big|_{\lambda=0} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_{jk} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{d\tilde{u}_j}{dt} \right] \Big|_{\lambda=0} \frac{du_k}{dt} + g_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{d\tilde{u}_k}{dt} \right] \Big|_{\lambda=0} \right\} \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jkl} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \left[\frac{d\tilde{u}_l}{d\lambda} \right] \Big|_{\lambda=0} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jk} g_{jk} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{d\tilde{u}_j}{dt} \right] \Big|_{\lambda=0} \frac{du_k}{dt} dt
\end{aligned}$$

今

$$\left[\frac{d\tilde{u}_l}{d\lambda} \right] \Big|_{\lambda=0} = v_l(t), \quad \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{d\tilde{u}_j}{dt} \right] \Big|_{\lambda=0} = \frac{dv_j}{dt}(t)$$

を代入して

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jkl} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} v_l dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jk} g_{jk} \frac{du_k}{dt} \frac{dv_j}{dt} dt = 0$$

$v_j(t_1) = v_j(t_2) = 0$ に注意して，この第 2 項を部分積分する．

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jkl} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} v_l dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{jk} \frac{d}{dt} \left(g_{jk} \frac{du_k}{dt} \right) v_j dt = 0$$

すなわち

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_l \left[\frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} - \sum_k \frac{d}{dt} \left(g_{lk} \frac{du_k}{dt} \right) \right] v_l dt = 0$$

この式は, $v_l(t_1) = v_l(t_2) = 0$ なる任意の v_l に対して成り立つ. したがって

$$\sum_k \frac{d}{dt} \left(g_{lk} \frac{du_k}{dt} \right) - \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0$$

計算すると

$$\sum_k \left\{ g_{lk} \frac{d}{dt} \left(\frac{du_k}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (g_{lk}) \frac{du_k}{dt} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0$$

よって

$$\sum_k g_{lk} \frac{d^2 u_k}{dt^2} + \sum_{jk} \frac{\partial g_{lk}}{\partial u_j} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} - \sum_{jk} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0$$

g^{il} をかけて, \sum_l をする. また, 左辺第 2 項は j, k について対称である.

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left\{ \sum_{jk} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \right) \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \right\} = 0$$

ここで

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \right)$$

を代入して

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0 \quad (2.30)$$

を得る. この式を測地線の微分方程式という. 以上で, 2 点間の最短曲線は測地線の微分方程式を満たすことが確かめられた.

一方, 測地曲率 $\kappa_g \equiv 0$ で定義される測地線はこの方程式を満たすであろうか. $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s))$ を測地線とし, s をその弧長パラメータとする. すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \frac{d}{ds} \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s)) = \mathbf{x}_1 \frac{du_1}{ds} + \mathbf{x}_2 \frac{du_2}{ds} \\ \mathbf{x}''(s) &= \frac{d}{ds} \left(\sum_j \mathbf{x}_j \frac{du_j}{ds} \right) = \sum_j \mathbf{x}_j \frac{d^2 u_j}{ds^2} + \sum_{jk} \mathbf{x}_{jk} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} \end{aligned}$$

である. ここで, ガウスの公式を代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(s) &= \sum_j \mathbf{x}_j \frac{d^2 u_j}{ds^2} + \sum_{jk} \left(\sum_i \Gamma_{jk}^i \mathbf{x}_i + H_{jk} \mathbf{n} \right) \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} \\ &= \sum_i \left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} \right) \mathbf{x}_i + \sum_{jk} \left(H_{jk} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

を得る．いま， $x'' = k(s)$ で，したがって，右辺第 1 項が測地曲率ベクトルで，その係数が測地線の微分方程式の左辺である．よって，弧長パラメータをもつ曲線に関しては

$$“\kappa_g \equiv 0” \iff “測地線の微分方程式を満たす”$$

である．

さらに，弧長パラメータでなくても， $u_1(t), u_2(t)$ を測地線の微分方程式の解として

$$\gamma(t) = \mathbf{x}(u_1(t), u_2(t))$$

が測地線を表していることを確かめよう．同様の計算により

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \sum_i \left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \right) \mathbf{x}_i + \sum_{jk} \left(H_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \right) \mathbf{n} \\ &= \sum_{jk} \left(H_{jk} \frac{du_j}{dt} \frac{du_k}{dt} \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

これは曲率ベクトル $k \perp T_{\mathbf{x}(t)}S$ を示し，したがって， $\kappa_g \equiv 0$ である．また， $\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 2(\ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \equiv 0$ であるから， $\gamma(t)$ の速度は一定であることもわかる．

測地線の微分方程式は t を独立変数とする 2 階の常微分方程式である．この形の方程式は任意の初期値 $u_1(t_0), u_2(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dot{u}_2(t_0)$ に対して，局所的に解が存在し，一意的である．

その結果，任意の点 P とその点での接ベクトル ξ に対し， ξ に接する測地線が一意的に存在し，また，十分近い 2 点 P, Q に対して， P, Q を結ぶ測地線が存在することがわかる．

2.6.2 極小曲面

空間の与えられた閉曲線 Γ に対し，それを境界にする曲面のうちで，面積が最小のもの S が存在したとする．そのとき， S は平均曲率が 0，すなわち，極小曲面であることを示したい．

まず，曲面 $\{x(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in D\}$ の面積は

$$A(S) = \iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du_1 du_2 \quad (2.31)$$

で与えられる．実際， (u_1, u_2) と $(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2)$ を対角線とする $u_1 u_2$ 平面の微小長方形は，曲面 S 上の微小平行四辺形に写され，それは $\Delta u_1 \mathbf{x}_1$ と $\Delta u_2 \mathbf{x}_2$ を 2 辺とする平行四辺形で近似される．そのとき

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \text{ の長さ} &= \sqrt{g_{11}}, & \mathbf{x}_2 \text{ の長さ} &= \sqrt{g_{22}} \\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \text{ の角度 } \theta, \cos \theta &= \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \end{aligned}$$

であるから，その面積は

$$\begin{aligned}\Delta u_1 \Delta u_2 \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sin \theta &= \Delta u_1 \Delta u_2 \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{1 - \frac{(g_{12})^2}{g_{11}g_{22}}} \\ &= \Delta u_1 \Delta u_2 \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\end{aligned}$$

で与えられ，その和は

$$\iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du_1 du_2$$

に収束する．

曲面 $S = \{x(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in D\}$ において， $u_1 u_2$ 平面の領域 D の境界 ∂D が滑らかな曲線であるとする． (u_1, u_2) が ∂D を動くとき， $x(u_1, u_2)$ は空間 \mathbb{R}^3 のある閉曲線 ∂S を動く．空間曲線 ∂S を固定したまま， S を変形したものを \tilde{S} とするとき，条件

$$A(\tilde{S}) \geq A(S)$$

を満たすものとする．すなわち， S は境界 ∂S をもつ曲面のうち，面積最小のものとする．このような仮定の下で，平均曲率 $H \equiv 0$ であることを示そう．

曲面 $S = \{x(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in D\}$ を，その法線 $\mathbf{n}(u_1, u_2)$ 方向に， $\lambda h(u_1, u_2)$ だけ動かしたものを $\tilde{S} = \{\tilde{x}(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in D\}$ とする．ここで， λ は実パラメータ， $h(u_1, u_2)$ は滑らかな関数で， $(u_1, u_2) \in \partial D$ のとき， $h(u_1, u_2) = 0$ なるものとする．すなわち

$$\tilde{x}(u_1, u_2) = x(u_1, u_2) + \lambda h(u_1, u_2) \mathbf{n}(u_1, u_2)$$

と表される．すると

$$A(\tilde{S}) = \iint_D \sqrt{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2} du_1 du_2$$

であるが，ここで

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_j} \right) \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial u_i} &= \frac{\partial x}{\partial u_i} + \lambda \left(\frac{\partial h}{\partial u_i} \mathbf{n} + h \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} \right) \\ &= \mathbf{x}_i + \lambda \left(\frac{\partial h}{\partial u_i} \mathbf{n} + h \mathbf{n}_i \right)\end{aligned}$$

である．さらに， $(\mathbf{x}_i, \mathbf{n}) = 0$ ， $H_{ij} = -(\mathbf{x}_i, \mathbf{n}_j) = -(\mathbf{x}_j, \mathbf{n}_i)$ を用いて

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= g_{ij} + \lambda (h(\mathbf{x}_i, \mathbf{n}_j) + h(\mathbf{x}_j, \mathbf{n}_i)) + \lambda^2 \dots \\ &= g_{ij} - 2\lambda h H_{ij} + \lambda^2 \dots\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} & \sqrt{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2} \\ &= \sqrt{(g_{11} - 2\lambda h H_{11} + \lambda^2 \dots)(g_{22} - 2\lambda h H_{22} + \lambda^2 \dots) - (g_{12} - 2\lambda h H_{12} + \lambda^2 \dots)^2} \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 - 2\lambda h(g_{11}H_{22} + g_{22}H_{11} - 2g_{12}H_{12}) + \lambda^2 \dots} \end{aligned}$$

であるが，ここで $\sqrt{1+x}$ のテイラー展開

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$$

を用いて，平均曲率の定義式

$$H = \frac{1}{2}\text{tr}(G^{-1}\Phi) = \frac{g_{11}H_{22} - 2g_{12}H_{12} + g_{22}H_{11}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)}$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} & \sqrt{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2} \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left(1 + \frac{-h(g_{11}H_{22} - 2g_{12}H_{12} + g_{22}H_{11})}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \lambda + \lambda^2 \dots \right) \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} (1 - 2\lambda h H + \lambda^2 \dots) \end{aligned}$$

と表すことができる．これを D 上積分して

$$\begin{aligned} A(\tilde{S}) &= \iint_D \sqrt{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2} du_1 du_2 \\ &= \iint_D (1 - 2\lambda h H + \lambda^2 \dots) \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du_1 du_2 \\ &= A(S) - 2\lambda \iint_D h H \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du_1 du_2 + \lambda^2 \dots \end{aligned}$$

を得る．よって

$$\left. \frac{dA(\tilde{S})}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -2 \iint_D h H \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du_1 du_2$$

であるが，今， $A(\tilde{S})$ は $\lambda = 0$ のとき $A(S)$ となり極小である．したがって

$$\iint_D h H \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du_1 du_2 = 0$$

である．この式は， ∂D 上 0 である任意の $h(u_1, u_2)$ について成り立たなければならない．いたるところ $\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} > 0$ であるから

$$H \equiv 0$$

が示された．