Robin 境界条件下での Stokes 方程式のレゾルベント評価について

柴田 良弘 (早大理工)
島田 理恵子 (早大理工)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ は有界領域, 外部領域, 半空間, perturbed half-space, すなわちある $R > 0$ に対し $\Omega \cap B_R^c = \mathbb{R}_+^n \cap B_R^c$ なる領域, ここで $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ とおいた. $\partial\Omega \in C^{2,1}$ を仮定する. $0 < \epsilon < \pi$ に対し, $\Sigma_\epsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}; |\arg\lambda| \leq \pi - \epsilon\}$ とする. このとき $\lambda \in \Sigma_\epsilon$ に対し領域 Ω における定常 Stokes 方程式の境界値問題:

$$\begin{cases} \lambda u - \mathrm{Div}T(u,\pi) = f, \ \mathrm{div}\, u = g & \text{in} \ \ \Omega, \\ \nu \cdot u = 0, \ \alpha u + T(u,\pi)\nu - (T(u,\pi)\nu,\nu)\nu = h & \text{on} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{RS}$$

を考える.

ここで $u = (u_1, \cdots, u_n)$ は速度ベクトル, π は圧力, ν は $\partial\Omega$ 上での単位外法線, $T(u,p)$ は応力テンソル, すなわち, 単位面積あたりにはたらく力を表し次の式で書き表されているとする:

$$T(u,\pi) := D(u) - \pi I.$$

ここで $D(u) = (\partial_j u_k + \partial_k u_j)_{j,k}$ なる $n \times n$ 行列とする. また f は流体に作用する外力を表すベクトル値関数とし既知関数とする. $T(u,\pi)\nu - (T(u,\pi)\nu,\nu)\nu = D(u)\nu - (D(u)\nu,\nu)\nu$ であるから境界条件として $\alpha u + D(u)\nu - (D(u)\nu,\nu)\nu = h$ on $\partial\Omega$ を考えてもよい.

Robin 境界条件下での Stokes 方程式に対する解のレゾルベント評価については, 半空間, $\mathrm{div} u = 0$, 斉次 Robin 条件の場合に Saal [1] で示されている. その方法は解の具体的な表示を与え Fourier multiplier Theorem を適用して $L_q(\Omega)$ の評価を行なうものである.

我々はより一般の領域において非斉次 Robin 境界条件を考える. 次の結果が得られたので報告する.

Theorem(Resolvent Estimate) $1 < q < \infty$ とする. $0 < \epsilon < \pi, 0 < \sigma, \lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ をそれぞれ任意にとる. $f \in L_q(\Omega)$, $h \in W_q^1(\Omega)^n$, $\nu \cdot h|_{\partial\Omega} = 0$, $g \in W_q^1(\Omega) \cap \hat{W}_q^{-1}$ とし supp g:コンパクトとする. このとき (RS) は一意解 $(u,\pi) \in W_q^2(\Omega)^n \times \hat{W}_q^1(\Omega)$ をもつ.

さらに, 次が成り立つ:

ある $C = C_{\epsilon,q,\sigma}$ が存在して任意の $\lambda \in \Sigma_\epsilon$, $|\lambda| \geq \sigma$ に対し

$$
\begin{aligned}
|\lambda| \|u\|_q + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_q + \|\nabla^2 u\|_q + \|\nabla \pi\|_q \\
\leq C\{\|f\|_q + \alpha|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_q + \|\nabla g\|_q + |\lambda|\|g\|_{-1,q} \\
+ \alpha|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\|\nabla g\|_q + \alpha|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{-1,q} + \|\nabla h\|_q + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|h\|_q\}.
\end{aligned}
$$

証明の第 1 段階は半空間でのモデル問題の解の表示に Fourier multiplier Thorem を適用してレゾルベント評価を行なう. ここでは, 非斉次 Robin 境界条件を考えているので半空間での解の表示は Saal [1] で与えられているものとは異なる. 第 2 段階は全空間と半空間のレゾルベント評価を単位分解を用いて一般の領域の場合に拡張する. この際現れる剰余項の評価の部分に $\hat{W}_q^{-1}$ 空間を用いる.

$$
J_q(\Omega) := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_q}, \qquad C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n : \mathrm{div} u = 0\}
$$
$$
G_q(\Omega) := \{\nabla \pi \in L_q(\Omega)^n : \pi \in \hat{W}_q^1(\Omega)\}, \quad \hat{W}_q^1(\Omega) := \{u \in L_{q,loc}(\overline{\Omega});\ \nabla u \in L_q(\Omega)\}
$$

とおく. このとき一般に $L_q(\Omega) = J_q(\Omega) \oplus G_q(\Omega)$ であることが知られている.

$P_q : L_q \to J_q(\Omega)$ を射影とし, Stokes 作用素 A_q を

$$
A_q(\Omega) = -P_q\Delta, \quad D(A_q) := \{u \in W_q^2(\Omega) \cap J_q(\Omega) : \alpha u + D(u)\nu - (D(u)\nu, \nu)\nu|_{\partial\Omega} = 0\}
$$

と定める.
Corollary $-A_q$ は $J_q(\Omega)$ 上解析的半群 $\{e^{-tA_q}\}_{t\geq 0}$ を生成する.

参考文献

[1] J.Saal *Robin Boundary Conditions and H^∞ calculus for the Stokes Operator.* Doctor thesis.