

エルゴード過程を初期値に持つ KdV 方程式について

小谷眞一

南京大学, 大阪大学

2019 年 11 月

概要

KdV 方程式は 1967 年のシュレーディンガー作用素との関連が明らかになって以来多くの観点から研究されてきており, すでに研究されつくされたとの感がある. しかし, 近年, 今まで研究されてこなかった非減衰, 非周期的なクラス of 初期値に対して KdV 方程式を解き, 解の性質を調べるという問題に興味を持たれるようになった. 講義では KdV 方程式の解の構成問題を, 広田-佐藤理論を解析的な立場から見直すことにより解決する. これにより広範囲の非減衰, 非周期的な初期値に対して KdV 方程式の解の構成が可能になる. エルゴード理論の観点からの将来の未解決問題についても述べる.

1 序

1.1 歴史

- (1) 1834 年 J.S.Russel がエディンバラの運河で波がどこまでも形を崩さず伝播していく様子を観察
- (2) 1895 年 Korteweg-de Vries が浅水波を記述する方程式として

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u$$

を導出し, 以来この方程式は **KdV 方程式** と呼ばれる. 進行波解 $u(t, x) = f(x - ct)$ は ODE

$$-cf' = -f''' + 6ff'.$$

を満たし, その有界な解として

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\cosh^2 \sqrt{c}(x-a)/2} & (\text{孤立波解}) \\ -u_0 - 2\kappa^2 k^2 \operatorname{cn}^2(\kappa(x+\delta); k^2) & (\text{周期解}) \end{cases}$$

を得る.

- (3) 1965 年 Kruskal-Zabusky は計算機実験により **周期初期条件** から解いた KdV 方程式の解は

- 1. 高い山が低い山に追いつき衝突後, 再び 2 つの波は元の形状を保つ (粒子性, soliton)
- 2. ある時間が経過すると, 波の形が元の形に限りなく近づく (再帰性)

を観察した.

- (4) 1967 年 Gardner, Greene, Kruskal, Miura (GGKM) は KdV 方程式の解を 1 次元 Schrödinger 作用素の potential とするとき, その固有値が時間に依存しないことを発見し, それをもとに急減少で無反射な初期値から出発する KdV 方程式を解いた. その解は粒子性を示した.

- (5) 1971 年 Zakharov は Schrödinger 作用素のスペクトルが稠密な固有値からなるとき, KdV 方程式の

解は稠密な孤立波解からなることを想定して、その密度の時間変化を記述する方程式を導出した。 $f(t, x; \lambda)$ を時間 t での、空間 $(x, x + dx)$ エネルギー域 (スペクトル領域) $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ に存在する孤立波の密度とすると、 f は

$$f_t + (sf)_x = 0$$

を満たす。ただし、 s は孤立波の速度で密度 f とは積分方程式

$$s(\lambda) = 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \log \left| \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \right| f(\mu) (s(\lambda) - s(\mu)) d\mu$$

で関係している。

(6) 1975 年 Lax は周期的な初期値から出発する KdV 方程式の解は時間について概周期的になること (つまり再帰性) を示した。

1.2 既存の結果

(1) KdV 方程式を解く方法としては、主に 2 つある。

1. Schrödinger 作用素のスペクトルの不変性を利用する方法。
2. Bourgain により開発された Fourier 変換制限法を利用する方法。

これらの方法により得られている最良の結果は、初期値がソボレフ空間 $H^{-1}(\mathbb{R})$, $H^{-1}(\mathbb{T})$ に属するときの一意可解性である。

(2) 初期値が周期的でなく振動する場合の代表として**概周期的**な初期値があるが、その場合の最良の結果は、2019 年に Eichinger - VandenBoom - Yuditskii による以下のものである。

概周期的関数 u を potential にもつ Schrödinger 作用素のスペクトルが
絶対連続スペクトルのみをもち、そのスペクトルが均一性を満たすとき、 u を初期値
にもつ KdV 方程式の解は時間的に概周期的である。

Deift は一般の概周期的な初期値に対して KdV 方程式の解は時間的に概周期的であるという予想を立てている。

(3) 初期値が急減少の関数のとき $t \rightarrow \pm\infty$ での漸近的性質として

1. $\exists \epsilon > 0$ に対して時空領域 $\{(x, t); x, t > 0, x > \epsilon t\}$ では

$$\sup_{\pm x > \pm \epsilon t} \left| u(x, t) - \sum_{j=1}^n s(x - 4\eta_j^2 t - \delta_j^\pm; 4\eta_j^2) \right| \rightarrow 0$$

ただし $s(x; c) \equiv -2\text{sech}\sqrt{cx}/2$

2. $\exists C > 0$ に対して 時空領域 $\{(x, t); |x/(3t)^{1/3}| < C\}$ では、解は Painlevé II の解に近づく。
3. $\exists C > 0$ に対して 時空領域 $\{(x, t); x < 0, C^{-1} < -x/(3t)^{1/3}(\log t)^{2/3} < C\}$ では、解は楕円関数に近づく。
4. $\exists C > 0$ に対して 時空領域 $\{(x, t); x/t < -C\}$ では解は三角関数により近似できる。

1.3 課題

以上の現状の下, KdV 方程式に関して以下の課題を提案する.

1. 振動する一般の初期値に対して (特にエルゴード的な初期値に対して) KdV 方程式を解く.
2. エルゴード的な初期値に対して KdV 方程式の解の時間無限大での状態を調べる. 特に
 - (a) 初期値が概周期的な場合の KdV 方程式の解の時間についての概周期性.
 - (b) シフト不変な集合 F に対してシフト不変な確率測度が一意な場合, KdV flow に対して不変な確率測度の一意性. これが正しいければ, KdV flow に関してエルゴード性がわかり, 時間についての再帰性が示される.

このノートでは課題 1 に対して肯定的な解答を与え, 課題 2 に対して将来の参考になる事項を解説する.

2 Weyl 関数と漸近的性質

この節では Schrödinger 作用素の Weyl 関数を導入し、その漸近的性質を示す。この性質はのちに KdV 方程式を解くときに重要な要素になる。

2.1 Weyl 関数

実軸 $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $q \in L^1_{loc}$ を potential にもつ Schrödinger 作用素 $L_q = -\partial_x^2 + q$ に関して境界 $\pm\infty$ が極限点型になっているとする。 $z \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi_z(x)$, $\psi_z(x)$ を

$$-f'' + qf = zf \quad \text{の解で} \begin{cases} f(0) = 1, f'(0) = 0 \implies f(x) = \varphi_z(x) \\ f(0) = 0, f'(0) = 1 \implies f(x) = \psi_z(x) \end{cases}$$

で定める。 $a > 0$, $z \in \mathbb{C}_+$ に対して

$$D_a(z) = \left\{ m \in \mathbb{C}_+; \int_0^a |\varphi_z(x) + m\psi_z(x)|^2 dx \leq \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} z} \right\}$$

とおくと、 $D_a(z)$ は $\mathbb{C}_+$ 内の

$$\begin{cases} \text{中心} = -\frac{\varphi_z(a)\overline{\psi'_z(a)} - \varphi'_z(a)\overline{\psi_z(a)}}{\psi_z(a)\overline{\psi'_z(a)} - \psi'_z(a)\overline{\psi_z(a)}} \\ \text{半径} = \left| \psi_z(a)\overline{\psi'_z(a)} - \psi'_z(a)\overline{\psi_z(a)} \right|^{-1} \end{cases}$$

とする円板になる。 $a < b$ なら $D_a(z) \supset D_b(z)$ となるが、 $+\infty$ が極限点型の場合には

$$\bigcap_{a>0} D_a(z) = \{ \text{一点} \}$$

となるので、その一点を $m_+(z)$ とする。同様な議論を $\mathbb{R}_-$ 上で行い $m_-(z)$ を定める。ただし対応する円板は

$$\left\{ m \in \mathbb{C}_+; \int_a^0 |\varphi_z(x) - m\psi_z(x)|^2 dx \leq \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} z} \right\}$$

である。 $m_{\pm}(z)$ は $\mathbb{C}_+$ 上で正則関数になり

$$\operatorname{Im} m_{\pm}(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C}_+$$

を満たす。 $\mathbb{C}_-$ 上では $m_{\pm}(z) = \overline{m_{\pm}(\bar{z})}$ で定める。 $\mathbb{C}_+$ から $\mathbb{C}_+$ への正則関数は Herglotz 関数と呼ばれている。 $m_{\pm}(z)$ は **Weyl 関数** と呼ぶ。

$$f_{\pm}(x, z) = \varphi_z(x) \pm m_{\pm}(z)\psi_z(x)$$

とおくと、 $f_{\pm}$ は

$$-f''_{\pm} + qf_{\pm} = zf_{\pm}, \quad f_{\pm} \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}), \quad f_{\pm}(0, z) = 1$$

を満たす。このような $f_{\pm}$ は一意である。 q に対してシフト θ_x を $(\theta_x q)(\cdot) = q(\cdot + x)$ で定め、 $m_{\pm}(z)$, $f_{\pm}(\cdot, z)$ の q 依存性を $m_{\pm}(z, q)$, $f_{\pm}(\cdot, \theta_x z)$ で表すと、 $f_{\pm}$ の一意性より

$$f_{\pm}(y, z, \theta_x q) = \frac{f_{\pm}(x + y, z, q)}{f_{\pm}(x, z, q)}$$

となるので

$$m_{\pm}(z, \theta_x q) = \pm f'_{\pm}(0, z, \theta_x q) = \pm \frac{f'_{\pm}(x, z, q)}{f_{\pm}(x, z, q)}$$

となり, $m_{\pm}$ は Ricatti 方程式

$$\pm \partial_x m_{\pm}(z, \theta_x q) = q(z) - z - m_{\pm}(z, \theta_x q)^2 \quad (1)$$

を満たすことがわかる.

2.2 漸近展開

$-\varphi_z(a)/\psi_z(a) \in \partial D_a(z)$, $m_+(z) \in D_a(z)$ となっているので

$$\left| m_+(z) + \frac{\varphi_z(a)}{\psi_z(a)} \right| \leq \frac{2}{\left| \psi_z(a) \overline{\psi'_z(a)} - \psi'_z(a) \overline{\psi_z(a)} \right|} \quad (2)$$

と評価できる. $k = \sqrt{-z}$ とおく. $f(0) = 1$, $f'(0) = k$ を満たす $-f'' + qf = -k^2 f$ の解 $U(x, k)$ は, 積分方程式

$$U(x, k) = e^{kx} + \int_0^x \frac{\sinh k(x-y)}{k} q(y) U(y, k) dy \quad (3)$$

を解くことにより得られる. $\varphi_z(x)$, $\psi_z(x)$ は

$$\varphi_z(x) = \frac{U(x, k) + U(x, -k)}{2}, \quad \psi_z(x) = \frac{U(x, k) - U(x, -k)}{2k} \quad (4)$$

となる. $Q(x) = \int_0^x |q(y)| dy$ とおくと, 逐次近似により $U(x, k)$ は

$$\begin{cases} |U(x, k) - e^{kx}| \leq e^{\operatorname{Re} k|x|} \left(\exp(|k|^{-1} Q(x)) - 1 \right) \\ |U'(x, k) - ke^{kx}| \leq e^{\operatorname{Re} k|x|} |k| \left(\exp(|k|^{-1} Q(x)) - 1 \right) \end{cases}$$

と評価できるので, $\operatorname{Re} k > 0$ なら

$$\begin{cases} \psi_z(x) - k^{-1} \sinh kx = O(k^{-2} e^{kx}) \\ \psi'_z(x) - \cosh kx = O(k^{-1} e^{kx}) \end{cases}$$

がわかり, 評価

$$\begin{aligned} \psi_z(a) \overline{\psi'_z(a)} - \psi'_z(a) \overline{\psi_z(a)} &= 2i \operatorname{Im} (k^{-1} \sinh ka \cosh \bar{k}a) + O(k^{-2} e^{2a \operatorname{Re} k}) \\ &= e^{2a \operatorname{Re} k} (i \operatorname{Im} k^{-1} / 2 + O(k^{-2})). \end{aligned}$$

より, 固定する $a > 0$ ごとに Weyl 円の半径は

$$\frac{2}{\left| \psi_z(a) \overline{\psi'_z(a)} - \psi'_z(a) \overline{\psi_z(a)} \right|} \sim \frac{4e^{-2a \operatorname{Re} k}}{|\operatorname{Im} k^{-1}|}, \quad k \rightarrow \infty$$

を満たす. $0 < \epsilon < \pi$ を満たす ϵ に対して扇型領域 $\{\epsilon < \arg z < \pi - \epsilon\}$ に z が属するとき, k は $-\pi/2 + \epsilon/2 < \arg k < -\epsilon/2$ を満たすので $\operatorname{Re} k > 0$ となる. したがって (2) より $m_+(z)$ は $-\varphi_z(a)/\psi_z(a)$ により指数関数的に近似できる. $\varphi_z(a)$, $\psi_z(a)$ の漸近的性質を得るには, (4) から $U(x, k)$ の評価より分かるので, 積分

方程式 (3) の解を調べればよいことになる． $q \in C^{N-1}[0, a]$ なら，部分積分を何回か実行することにより $U(x, k)$ の評価が得られ

$$-\frac{\varphi_z(a)}{\psi_z(a)} = -k + \sum_{j=1}^N c_j k^{-j} + o(k^{-N})$$

と漸近展開が示され， $m_+(z)$ も同じ展開

$$m_+(z) = -k + \sum_{j=1}^N c_j k^{-j} + o(k^{-N}), \quad (k = \sqrt{-z})$$

を持つ．係数 c_j は漸化式

$$\begin{cases} c_0(x) = 1, & c_1(x) = 0, & c_2(x) = q(x)/2 \\ c_j(x) = \frac{1}{2}c'_{j-1}(x) - \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{j-1} c_\ell(x) c_{j-\ell}(x) & (j \geq 3) \end{cases} \quad (5)$$

より， $c_j = c_j(0)$ とすれば求まる． (5) は

$$m_+(z, \theta_x q) = -k + \sum_{j=1}^N c_j(x) k^{-j} + o(k^{-N})$$

とおき，Riccati 方程式 (1) に代入することにより得られる． $m_-(z)$ も同様の展開を持ち

$$m_-(z) = -k + \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} c_j k^{-j} + o(k^{-N})$$

がわかる．まとめると

補題 1 ある $a > 0$ に対して $q \in C^{N-1}(-a, a)$ とすると，領域 $\{\epsilon \leq \arg z \leq \pi - \epsilon\}$ ($0 < \epsilon < \pi$) で

$$\begin{cases} m_+(z) = -k + \sum_{j=1}^N c_j k^{-j} + o(k^{-N}) \\ m_-(z) = -k + \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} c_j k^{-j} + o(k^{-N}) \end{cases} \quad (k = \sqrt{-z}) \quad (6)$$

が $z \rightarrow \infty$ のとき成り立つ．係数 c_j は (5) より求まる．

我々のはちに KdV 方程式を解くために， $\{\epsilon \leq \arg z \leq \pi - \epsilon\}$ より広い実軸にあるオーダーで接近する領域で漸近展開 (6) を要求する．

3 主定理

この節では，KdV 方程式を解くための初期値空間の設定を行い，その空間上で高次の KdV 方程式を含めた KdV flow の構成についての定理と，この初期値空間には滑らかなエルゴード的な確率過程が含まれることについての定理を述べる．定理の証明はのちの節で行う．

$\lambda_0 < 0$ を固定し，初期値関数 q は， q を potential に持つ Schrödinger 作用素 L_q のスペクトル Σ が

$$\Sigma \subset [\lambda_0, \infty)$$

を満たすものを考える． $b(> \lambda_0)$ を固定し， $(-\infty, b]$ 上のなめらかな関数 ω は

$$\text{任意の } x \in (-\infty, b) \text{ に対して } \omega(x) > 0 \text{ かつ } \omega(b) = 0$$

を満たすとする．この ω に対して $\mathbb{C}$ 内の曲線 C_ω を

$$C_\omega = \{x \pm i\omega(x); \quad x \leq b\}$$

で定める．曲線の向きは反時計回りとする．さらに ω はある奇数 $n \geq 1$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^{n/2-1} \omega(x) \in (0, \infty)$$

を満たすとする． $C = C_\omega$ とし， $c > 1$ に対して $C' = C_{c\omega}$ とする． $n \geq 3$ なら曲線 C, C' は下図のように $-\infty$ で実軸に接近している．

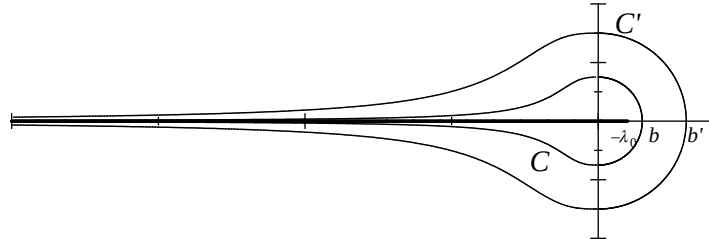


図 1

C_ω の内部領域 D_ω^+ と外部領域 D_ω^- を以下のように定める．

$$\begin{cases} D_\omega^+ = \{z \in \mathbb{C}; \quad |\operatorname{Im} z| < \omega(\operatorname{Re} z), \operatorname{Re} z < b\} \\ D_\omega^- = \mathbb{C} \setminus (D_\omega^+ \cup C_\omega) \end{cases} \quad (7)$$

$D_\omega^\pm$ は図示すると

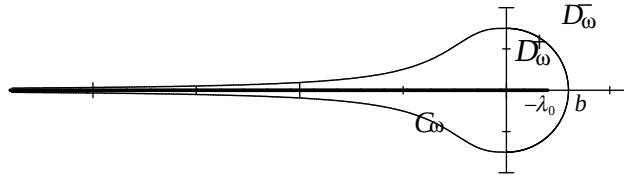


図 2

である．ここで

$$H(D_\omega^\pm) = D_\omega^\pm \text{ に極をもたない有理関数全体の } L^2(C_\omega)\text{-閉包}$$

とおき， $N > 0$ に対して空間 Φ_n^N を

$$\Phi_n^N = \left\{ u \in H(D_\omega^-); \quad \exists f \in H(D_\omega^+) \text{ s.t. } \int_{C_\omega} |z|^{2N} |u(z) - f(z)|^2 |dz| < \infty \right\} \quad (8)$$

で定める． n は曲線 C_ω の実軸への接近度を示す n である．Weyl 関数 $m_\pm$ に対して新しく m を

$$m(z) = \begin{cases} -m_+(-z^2) & \operatorname{Re} z > 0 \\ m_-(-z^2) & \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

とする. m は $\mathbb{C} \setminus [-\sqrt{-\lambda_0}, \sqrt{-\lambda_0}]$ で正則な関数になる. 一般に, $\mathbb{C}$ 内の領域上で定義された関数 f に対して

$$f_e(z) = \frac{1}{2} (f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})), \quad f_o(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} (f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z}))$$

で定めと

$$\begin{cases} m_e(z) = -\frac{1}{2} (m_+(-z) - m_-(-z)) \\ m_o(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z}} (m_+(-z) + m_-(-z)) \end{cases} \quad (9)$$

となる. Weyl 関数の空間を

$$\mathcal{M}_n^N = \left\{ m; \quad m_e \in \Phi_n^N, \quad m_o - 1 \in \Phi_n^{N+1/2} \right\} \quad (10)$$

定める. $m \in \mathcal{M}_n^N$ の十分条件として

補題 2 Weyl 関数 $m_{\pm}$ が外部領域 D_{ω}^- で漸近展開

$$\begin{cases} m_+(z) = -k + \sum_{j=1}^N c_j k^{-j} + O(z^{-(N+1)/2}) \\ m_-(z) = -k + \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} c_j k^{-j} + O(z^{-(N+1)/2}) \end{cases} \quad (k = \sqrt{-z}) \quad (11)$$

を満たすなら, $N' < N/2$ に対して $m \in \mathcal{M}_n^{N'}$ に属する.

証明. N_1 を $N/2$ 以下の最大の整数, N_2 を $(N+1)/2$ 以下の最大の整数とすると, (9) より

$$\begin{cases} m_e(z) = -\sum_{j=1}^{N_1} c_{2j} z^{-j} + O(z^{-(N+1)/2}) \\ m_o(z) - 1 = -\sum_{j=1}^{N_2} c_{2j-1} z^{-j} + O(z^{-N/2-1}) \end{cases}$$

となる. $\zeta \in D_{\omega}^-$ を固定すると, 一般に有理関数 $\sum_{j=1}^M a_j z^{-j}$ に対して $\{\tilde{a}_j\}$ を適当に選ぶと

$$\sum_{j=1}^M a_j z^{-j} - \sum_{j=1}^M \tilde{a}_j (z + \zeta)^{-j} = O(z^{-M-1})$$

とできるので

$$\begin{cases} m_e(z) = -\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{c}_{2j} (z + \zeta)^{-j} + O(z^{-(N+1)/2}) + O(z^{-N_1-1}) \\ m_o(z) - 1 = -\sum_{j=1}^{N_2} \tilde{c}_{2j-1} (z + \zeta)^{-j} + O(z^{-N/2-1}) + O(z^{-N_2-1}) \end{cases}$$

となる. $(N+1)/2 \leq N_1 + 1$, $N/2 + 1 \leq N_2 + 1$ なので

$$\begin{cases} m_e(z) = -\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{c}_{2j} (z + \zeta)^{-j} + O(z^{-(N+1)/2}) \\ m_o(z) - 1 = -\sum_{j=1}^{N_2} \tilde{c}_{2j-1} (z + \zeta)^{-j} + O(z^{-N/2-1}) \end{cases}$$

であり, $N' < N/2$ なら剰余項 $\epsilon(z)$ は

$$\int_{C_{\omega}} |z|^{2N} |\epsilon(z)|^2 |dz| < \infty$$

を満たすので, $m_e, m_o - 1 \in \mathcal{M}_n^{N'}$ となる. ■

$\mathcal{M}_n^N$ に作用 (のちに示す) する群 (可換群) を

$$\Gamma_n = \{g = e^h; h \text{ は次数が } n \text{ 以下の奇数次実多項式で } h(0) = 0\} \quad (12)$$

とする. $m \in \mathcal{M}_n^N$ に対して $L^2(C)$ 上の積分核 $N_{g,m}(z, \lambda)$ と $L^2(C)$ 上の積分作用素を

$$\begin{cases} N_{g,m}(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\widehat{g}_o(\lambda') (g\tilde{m})_e(\lambda) + \widehat{g}_e(\lambda') (g\tilde{m})_o(\lambda)}{(\lambda' - z)(\lambda - \lambda')} m_o(\lambda')^{-1} d\lambda' \\ N_m(g)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C N_{g,m}(z, \lambda) f(\lambda) d\lambda \end{cases} \quad (13)$$

で定める. ここで $\tilde{m}$ は, $m_e, m_o - 1 \in \Phi_n^N$ であるので, ある $f_1, f_2 \in H(D_\omega^+)$ に対して

$$\int_{C_\omega} |z|^{2N} |m_e(z) - f_1(z)|^2 |dz| < \infty, \quad \int_{C_\omega} |z|^{2N+1} |m_o(z) - 1 - f_2(z)|^2 |dz| < \infty$$

となるが, これにより

$$\tilde{m}(z) = m(z) - (f_1(z^2) + z f_2(z^2))$$

とする. $\widehat{g}(z) = g(z)^{-1}$ である. $\tilde{m}_e(z) = m_e(z) - f_1(z)$, $\tilde{m}_o(z) = m_o(z) - f_2(z)$ である. $M > 0$ に対して

$$\tilde{N}_{g,m}(z, \lambda) = z^{-M} N_{g,m}(z, \lambda) \lambda^M$$

とおくと, $g \in \Gamma_n$ で $N > (n-1)/2$ ならば $n/4 < M \leq N - (n-2)/4$ を満たす M に対して

$$\int_{C^2} |\tilde{N}_{g,m}(z, \lambda)|^2 |dz| |d\lambda| < \infty, \quad \int_C |\tilde{N}_{g,m}(z, z)| |dz| < \infty \quad (14)$$

となる. そこで $g \in \Gamma_n$ に対して

$$\tau_m(g) = \det_2 \left(I + \tilde{N}_m(g) \right) \exp \left(\int_C \tilde{N}_{g,m}(z, z) dz \right) \quad (15)$$

と定める. $e_x(z) = e^{xz} (\in \Gamma_1)$ とし

$$\mathcal{Q}_n^N = \{q; \quad q(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x), \quad m \in \mathcal{M}_n^N\} \quad (16)$$

とおき

$$\mathcal{Q}_n = \bigcap_{N \geq 1} \mathcal{Q}_n^N$$

とする. $n' \geq n$ なら $\Gamma_{n'} \supset \Gamma_n$, $\mathcal{Q}_{n'} \subset \mathcal{Q}_n$ である.

定理 1 $n \geq 25$ とする. $g \in \Gamma_n$, $q \in \mathcal{Q}_n$ に対して

$$(K(g)q)(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(ge_x)$$

と定めると $\{K(g)\}_{g \in \Gamma_n}$ は $\mathcal{Q}_n$ 上の flow を定める. 特に $g_t(z) = e^{-4tz^3}$ とすると $(K(g_t)q)(x)$ は KdV 方程式を満たす. e^{tz^n} とすれば n 次の KdV 方程式を満たす.

関数空間 $\mathcal{Q}_n$ の元はその Weyl 関数で間接的に記述されている. より直接的な記述が必要であるが, **Schwartz の急減少空間** $\mathcal{S}$, なめらかな **周期関数空間** は $\mathcal{Q}_n$ の部分集合である. さらに我々は次の定理を得た.

定理 2 $q_\omega(x)$ をエルゴード的な $\mathbb{R}$ 上の確率過程とする. その L_{q_ω} のスペクトルの下限が λ_0 で Lyapounov 指数 $\gamma(\lambda)$ が

$$\int_0^\infty \lambda^N \gamma(\lambda) d\lambda < \infty \quad \text{for } \forall N \geq 1 \quad (17)$$

を満たすとする、任意の n に対して、ほとんどすべての ω について $q_\omega \in \mathcal{Q}_n$ である。また任意の $g \in \Gamma_n$ に対して $K(g)q_\omega$ はエルゴード的な定常過程になる。さらに q_ω がなめらかですべての導関数が有界ならば (17) は満たされる。

記事 1 概周期関数はエルゴード的な確率過程とみなすことができるので、定理 4 により概周期関数を初期値に持つ KdV 方程式が解けることになる。ただしこの場合すべての ω に対して解けるかはわからないので、与えられた概周期関数に対して KdV 方程式が解けているのかはわからない。これに関しては、基礎となる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \{T_x\}_{x \in \mathbb{R}})$ の Ω が距離空間で、確率測度 μ の台が Ω になり

$$\int_{[0, \infty) \setminus \Sigma_{ac}} \lambda^N d\lambda < \infty \quad \text{for } \forall N \geq 1 \quad (18)$$

が満たされ、 Ω 上の連続関数 F により $q_\omega(x) = F(T_x \omega)$ と表されるなら、すべての ω に対して q_ω を初期値として KdV 方程式が解ける。

以下の節でこの主定理の証明を述べるが、正確な証明には技術的な問題が山積しているもので、それを詳述することはせず、このノートでは証明の要点を浮き彫りにしていくことにより理解してもらうことに努めた。証明の詳細は [SK2] を参照していただきたい。

4 半無限区間で無反射な初期値

この節から前節の定理の証明に移るが、いくつかの段階を経て証明が完成する。まず一段階として Schrödinger 作用素が半無限区間で無反射の場合に、佐藤-Segal-Wilson の Grassmann 多様体上で KdV flow を定義する。要点は

1. 初期値関数 q を Schrödinger 作用素の potential とみなし円周上の L^2 空間のある条件を満たす部分空間と対応させる。部分空間には群が作用し、その作用により KdV 階層に属する方程式系が記述される。
2. 群の作用を効果的に表現する τ -関数 (広田-佐藤による) を導入。
3. KdV 方程式系の解に特異点がないことを示すために、対象とする部分空間を対応する potential が半無限区間で無反射性をもつものに制限する。
4. τ -関数を可換な部分と Weyl 関数のみに依存する部分に分割する。のちの節で無反射性の過程を除く際に全社の部分は発散するが、後者の部分は収束し意味を持つ。
5. Weyl 関数のみに依存する τ -関数の成分を Weyl 関数を用いて積分作用素で表現する。

4.1 佐藤-Segal-Wilson の Grassmann 多様体 $Gr^{(2)}$

Segal-Wilson は佐藤の Grassmann 多様体を複素平面の円周上の L^2 空間の中に実現した。それから説明しよう。

$r > 0$ に対して複素平面上で $H = L^2(|z| = r)$ とする。 H の 2 つの閉部分空間 $H_\pm$ を

$$H_+ = \text{線形閉包 } \{z^n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad H_- = \text{線形閉包 } \{z^n, n = -1, -2, \dots\}$$

とすると

$$H = H_+ \oplus H_- \quad (\text{直交和})$$

である． H_+ の元は円板 $\{|z| < r\}$ に正則に拡張され， H_- の元は円板の外 $\{|z| > r\}$ に正則に拡張される． H_+ は円板 $\{|z| < r\}$ 上の Hardy 空間と呼ばれる． H から $H_{\pm}$ への直交射影をそれぞれ $\mathbf{p}_{\pm}$ とする． H の閉部分空間 W に対して次の性質を課す．

定義 1 $Gr^{(2)}$ は次の条件を満たす H の閉部分空間 W 全体である．

- (i) $f \in W \implies z^2 f \in W$
- (ii) $\mathbf{p}_+ : W \rightarrow H_+$ は 1 対 1 かつ全射

$Gr^{(2)}$ が我々の対象とする無限次元 Grassmann 多様体である．パラメータ z は Schrödinger 作用素のスペクトルパラメータの働きをするので，性質 (i) は Schrödinger 作用素が 2 階の微分作用素であることに対応している． W を解析するために，(i) に注意して H を偶関数と奇関数の空間に分解する．つまり

$$H \ni f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n$$

に対して

$$\begin{cases} f_e(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{2n} z^n \\ f_o(z) = \frac{f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{2n+1} z^n \end{cases}$$

とおき

$$\mathbf{H} = L^2(|z| = r^2) \times L^2(|z| = r^2)$$

とすると，自然な対応

$$H \ni f \rightarrow \begin{pmatrix} f_e \\ f_o \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$$

により， H と $\mathbf{H}$ は unitary 同値になる． $\mathbf{H}_{\pm}$ も $H_{\pm}$ と同様に定義できる． $\mathbf{H}_{\pm}$ への直交射影は同じ記号 $\mathbf{p}_{\pm}$ を使って表す． $W \in Gr^{(2)}$ の $\mathbf{H}$ への像 $\mathbf{W}$ は以下の性質を持つ．

- (i)' $\mathbf{f} \in \mathbf{W} \implies z \mathbf{f} \in \mathbf{W}$
- (ii)' $\mathbf{p}_+ : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{H}_+$ は 1 対 1 かつ全射

(i)', (ii)' を満たす $\mathbf{H}$ の閉部分空間全体を $\mathbf{Gr}^{(2)}$ とする．この対応を利用して $W \in Gr^{(2)}$ の例を挙げよう． $\{|z| = r\}$ 上の連続関数 $m(z)$ に対して

$$W_m = \{\varphi(z^2) + m(z)\psi(z^2) ; \quad \varphi, \psi \in H_+ (|z| = r^2)\} \quad (19)$$

とおく．ただし $H_+ (|z| = r^2)$ は円板 $\{|z| < r^2\}$ 上の Hardy 空間である．このとき

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & m_e(z) \\ 0 & m_o(z) \end{pmatrix} \quad (20)$$

とすると

$$\mathbf{W}_m = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(z) + m_e(z)\psi(z) \\ m_o(z)\psi(z) \end{pmatrix} ; \quad \varphi, \psi \in H_+ (|z| = r^2) \right\} = A(z)\mathbf{H}_+$$

となる． $W_m \in Gr^{(2)}$ となるための m の十分条件を示すために用語と補題を用意する． $\{|z| = r^2\}$ 上の有界な関数 $a(z)$ に対して $H_+ (|z| = r^2)$ 上の有界作用素 $T(a)$ を

$$T(a)f = \mathbf{p}_+(af)$$

で定める. $T(a)$ は a を表象とする **Toeplitz 作用素** と呼ばれている. 有界な行列値関数 $A(z)$ に対しても

$$T(A)\mathbf{f} = \mathbf{p}_+(A\mathbf{f})$$

により Toeplitz 作用素が定義される. (20) の $A(z)$ に対して $T(m_o)$ の逆 $T(m_o)^{-1}$ が存在すれば $T(A)$ の逆 $T(A)^{-1}$ も存在し

$$T(A)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -T(m_e)T(m_o)^{-1} \\ 0 & T(m_o)^{-1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

となることは容易にわかる. $T(a)$ が逆作用素を持つための十分条件を述べよう.

補題 3 $\{|z| = r^2\}$ 上の連続関数 $a(z)$ が条件

$$\begin{cases} a(z) - 1 \in H_- \ (|z| = r^2) \\ a(z) \neq 0, \quad \forall z \in \{|z| \geq r^2\} \end{cases} \quad (22)$$

を満たすなら, $T(a)$ は逆 $T(a)^{-1}$ を持ち, $T(a)^{-1} = T(a^{-1})$ となる.

証明. (22) より a による掛け算作用素は $H_- \ (|z| = r^2)$ 上の全単射になる. したがって

$$a(z)u(z) = f_+(z) + f_-(z), \quad u \in H_+ \ (|z| = r^2), f_{\pm} \in H_{\pm} \ (|z| = r^2)$$

とすると, $f_+ = T(a)u$ であり

$$u = a^{-1}f_+ + a^{-1}f_- = \mathbf{p}_+(a^{-1}f_+) = T(a^{-1})f_+ = T(a^{-1})T(a)u$$

となるので, $T(a^{-1})T(a) = I$ が成り立つ. 同様に $T(a)T(a^{-1}) = I$ もわかるので $T(a)^{-1} = T(a^{-1})$ となる. ■

例 1 $\{|z| = r\}$ 上の連続関数 $m(z)$ が条件

$$\begin{cases} m(z) - z \in H_- \\ m_o(z) \neq 0, \quad \forall z \in \{|z| \geq r^2\} \end{cases} \quad (23)$$

を満たすとする, $W_m \in Gr^{(2)}$ である.

証明. $m_e(z)$, $m_o(z)$ は $\{|z| = r^2\}$ 上の連続関数であるので (20) の行列 $A(z)$ も連続である. $m_o(z) \neq 0$ ならばその逆行列が連続な行列として存在し, W_m は H の閉部分空間になる. 性質 (i)' は容易に確かめられる. 性質 (ii)' を確かめよう. (23) より

$$m_e, \quad m_o - 1 \in H_- \ (|z| = r^2) \quad (24)$$

である. そこで $\mathbf{f} \in H_+$ に対して方程式

$$\mathbf{p}_+ \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} \in W_m$$

を考える. $\mathbf{u} \in W_m$ なので, ある $\varphi \in H_+$ に対して $u(z) = A(z)\varphi(z)$ となる. したがって上の方程式は

$$T(A)\varphi = \mathbf{f}$$

となる. $T(A)$ の逆が存在するための条件は $T(m_o)$ の逆が存在することであるが, 条件 (23) の下では m_o は条件 (22) を満たすので, W_m に対して性質 (ii)' が確かめられる. ■

$m(z) = z$ のときには $W_m = H_+$ となり, $W_m \in Gr^{(2)}$ は明らかである. この例では m がある意味で z に近い場合にも $W_m \in Gr^{(2)}$ となることを示している.

さて

$$\Gamma(r) = \{g = e^h; \quad h \text{ は } \{|z| \leq r\} \text{ の近傍で正則}\} \quad (25)$$

とすると, $g \in \Gamma(r)$ と H の閉部分空間 W に対して, H の新しい閉部分空間 gW ができる. これは性質 (i) を満たすが, 性質 (ii) は必ずしも満たされるとは限らない. この $\Gamma(r)$ の作用を記述するものとして τ -関数が重要であるが, これについては次節で説明する. ここでは $Gr^{(2)}$ と Schrödinger 方程式, KdV 方程式との関係を述べておこう.

x をパラメータとして (x は複素数でもよい) ある $W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$e^{xz}W \in Gr^{(2)}, \quad x \in I$$

が, 原点を含むある区間 I に属する x に対して成り立っているとする. I が十分小さい区間なら, この性質は成り立っている. $e^{xz}W$ に対する性質 (ii) より, 各 $x \in I$ に対してある $f(x, z) \in W$ が存在して, z の関数として

$$e^{xz}f(x, z) \in 1 + H_-$$

となる. つまり, $e^{xz}f(x, z)$ は $1 \in H_+$ に対応する $e^{xz}W$ の元である. 任意の H_- の元は $z = \infty$ のまわりの Taylor 展開をもつので, ある関数列 $\{c_k(x)\}_{k \geq 1}$ により

$$f(x, z) = e^{-xz} \left(1 + \frac{c_1(x)}{z} + \frac{c_2(x)}{z^2} + \frac{c_3(x)}{z^3} + \dots \right) \quad (26)$$

と表される. x について微分をとると

$$\begin{cases} f'(x, z) = -ze^{-xz} \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{c_k(x)}{z^k} \right) + e^{-xz} \sum_{k \geq 1} \frac{c'_k(x)}{z^k} \\ f''(x, z) = z^2 f(x, z) - 2ze^{-xz} \sum_{k \geq 1} \frac{c'_k(x)}{z^k} + e^{-xz} \sum_{k \geq 1} \frac{c''_k(x)}{z^k} \end{cases}$$

となるので, f, f', f'' の適当な線形結合により以下のように H_- の元を分離する.

$$\begin{aligned} & e^{xz} (f''(x, z) - z^2 f(x, z) + 2c'_1(x) f(x, z)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (c''_k(x) - 2c'_{k+1}(x) + 2c'_1(x) c_k(x)) \frac{1}{z^k} \end{aligned}$$

W の線形性より $f''(x, z)$ は z の関数として W に属することに注意すれば, 性質 (i) より左辺は $e^{xz}W$ に属することがわかる. 一方, 右辺は H_- の元であるので, $e^{xz}W$ に対する性質 (ii) より

$$\begin{cases} f''(x, z) + 2c'_1(x) f(x, z) - z^2 f(x, z) = 0 \\ c''_k(x) - 2c'_{k+1}(x) + 2c'_1(x) c_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

を得る. したがって

$$u(x) = -2c'_1(x) \quad (28)$$

と置けば, $f(x, z)$ は Schrödinger 方程式

$$-f''(x, z) + u(x)f(x, z) = -z^2 f(x, z)$$

を満たす. これにより $e^{xz}W \in Gr^{(2)}$ を満たす $W \in Gr^{(2)}$ からポテンシャル u が抽出できたことになる.

次に c を定数として作用 $e^{xz-ctz^3}W$ を計算してみよう．上と同様にして $f(x, t, z)$ を

$$e^{xz-ctz^3}f(z) \in 1 + H_-$$

を満たす W の唯一の元 f とし

$$\begin{cases} e^{xz-ctz^3}f(x, t, z) = 1 + u(x, t, z) & \exists u(x, t, z) \in H_- \\ u(x, t, z) = \frac{c_1(x, t)}{z} + \frac{c_2(x, t)}{z^2} + \frac{c_3(x, t)}{z^3} + \dots \end{cases}$$

とする． $'$ は x についての微分を表すとして， $e^{-xz+ctz^3}(1+u)$ を t, x について微分すると

$$\begin{cases} e^{xz-ctz^3}\partial_t f = cz^3(1+u) + \partial_t u \\ e^{xz-ctz^3}f' = -z(1+u) + u' \\ e^{xz-ctz^3}f''' = -z^3(1+u) + 3z^2u' - 3zu'' + u''' \end{cases} \quad (29)$$

となる．以下の計算では H_- -modulo で考え， H_+ 成分を $\partial_t f$, f' , f''' の適当な線形結合により消去していく．まず z^3 の項を消去するため

$$e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''') = \partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu'''$$

とすると，右辺の z の関数として H_+ に属する部分は

$$3cc'_1z + 3cc'_2 - 3cc''_1$$

となるので，次に $3cc'_1z$ を消すために $e^{xz-ctz^3}f'$ を使うと

$$e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''' + 3cc'_1f') = \partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu''' - 3zcc'_1(1+u) + 3cc'_1u'$$

となる．右辺の H_+ 成分は

$$3c(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)$$

であるので，この項を f を利用して消去すると

$$\begin{aligned} & e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''' + 3cc'_1f' - 3c(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)f) \\ & = \partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu''' - 3zcc'_1(1+u) + 3cc'_1u' - 3c(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)(1+u) \end{aligned}$$

となり，右辺は H_- の元となる．しかしながら，左辺は $e^{xz-ctz^3}W$ の元なので，空間 $e^{xz-ctz^3}W$ に対する性質 (ii) より

$$e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''' + 3cc'_1f' - 3c(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)f) = 0$$

となり，同時に

$$\partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu''' - 3zcc'_1(1+u) + 3u'cc'_1 - 3c(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)(1+u) = 0$$

を得る．(29) を使い左辺の z^{-1} の係数を計算して

$$\partial_t c_1 + c \left\{ 3c'_3 - 3c''_2 + c'''_1 - 3c'_1c_2 + 3(c'_1)^2 - 3(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)c_1 \right\} = 0$$

を得る． t を固定すれば $e^{-ctz^3}f(x, t, z)$ は $e^{-ctz^3}W$ の元であるので，(27) の等式を利用でき

$$c''_1 - 2c'_2 + 2c'_1c_1 = 0, \quad c''_2 - 2c'_3 + 2c'_1c_2 = 0$$

となっているので、これより c'_2, c'_3 を上式の $\{\cdot\}$ に代入すると

$$\begin{aligned}
& 3c'_3 - 3c''_2 + c'''_1 - 3c'_1c_2 + 3(c'_1)^2 - 3(c'_2 - c''_1 - c'_1c_1)c_1 \\
&= \frac{3}{2}(2c'_1c_2 + c''_2) - 3c''_2 + c'''_1 - 3c'_1c_2 + 3(c'_1)^2 - 3\left(c'_1c_1 + \frac{1}{2}c''_1 - c''_1 - c'_1c_1\right)c_1 \\
&= -\frac{3}{2}c''_2 + c'''_1 + 3(c'_1)^2 + \frac{3}{2}c_1c''_1 \\
&= -\frac{3}{4}\left(c'''_1 + 2c''_1c_1 + 2(c'_1)^2\right) + c'''_1 + 3(c'_1)^2 + \frac{3}{2}c_1c''_1 \\
&= \frac{1}{4}c'''_1 + \frac{3}{2}(c'_1)^2
\end{aligned}$$

を得る。結局

$$\partial_t c_1 + c\left(\frac{1}{4}c'''_1 + \frac{3}{2}(c'_1)^2\right) = 0$$

となる。 $u(x, t) = -2c'_1(x, t)$ とおき、上式を x で微分すると

$$\partial_t u + \frac{1}{4}cu''' - \frac{3}{2}cuu' = 0$$

となり、 $c = 4$ とすれば KdV 方程式の解 u が求まったことになる。

これを一般化するとつぎのようになる。 $g \in \Gamma(r)$ に対して

$$e^{xz}g(z)W \in Gr^{(2)}$$

とし、 $1 \in H_+$ に対応する $e^{xz}g(z)W$ の元を $e^{xz}g(z)f_g(x, z)$ とする。 $f_g(x, z) \in W$ は $e^{xz}g(z)W$ に対する条件 (ii) より一意的に決まる。

$$e^{xz}g(z)f_g(x, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x, g)z^{-k}$$

と表しておき、この係数を使い

$$u_g(x) = -2\partial_x c_1(x, g)$$

とおく。 $g(z) = 1$ のときの $u_g(x)$ を $u(x)$ とすれば、 g を取り換えることにより $u_g(x)$ は

$$\begin{cases} g(z) = e^{az} \implies u_g(x) = u(x+a) \\ g(z) = e^{-4tz^3} \implies u_g(x) = u(x, t) \text{ は KdV 方程式を満たし, } u(x, 0) = u(x) \end{cases}$$

となる。自然数 n に対して $g(z) = e^{cz^{2n}}$ のときには、性質 (i) より $gW = W$ となるので $Gr^{(2)}$ への作用としては恒等写像になる。したがって $g = e^{cz^n}$ としたとき意味のある場合は n が奇数の場合である。高次の n をとることにより高次の KdV 方程式の解が出てくる仕組みになっている。この u_g により KdV flow を $K(g)u = u_g$ として定義したい。これを正当化するにはいくつかの段階を経る必要がある。問題点を挙げておこう。

- [1] $Gr^{(2)} \ni W$ と potential u の対応で異なる W が同じ u を与える場合の事情の解明
- [2] $Gr^{(2)} \ni W, \quad \Gamma(r) \ni g \implies gW \in Gr^{(2)}$ となる W のクラスの設定
- [3] 広いクラスの初期値を扱うために $Gr^{(2)}$ の適当な拡張

以上までで佐藤理論の仕組みの本質的な部分の半分を述べたことになる．佐藤は上の空間 H ではなく形式的な微分演算 ∂_x の冪級数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \partial_x^n$$

の代数を考え、上に相当する演算を行っている．演算の途中で負冪の項は消去していく操作をしている．Segal-Wilson は擬微分作用素 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \partial_x^n$ の表象である $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ の空間で同等のことを実行したのであり、代数的には同じことである．しかし、後で見ることになるが、この Segal-Wilson の見直しにより Schrödinger 作用素のスペクトルとの関係が明確になり、さらなる拡張が可能になる．

記事 2 $Gr^{(2)}$ の定義で条件 (i) を仮定したが、これを除き条件 (ii) を少し弱くした Grassmann 多様体も考察の対象になることがある．例えば最近の SLE の研究ではこの空間が使われている．また条件 (i) を $z^3, z^4, \dots$ の掛け算で不変な条件に置き換えると基礎となる方程式は 2 階、4 階、 $\dots$ の常微分方程式になり、異なるクラスの非線形方程式が生じる．

4.2 τ -関数

4.2.1 定義と性質

τ -関数に相当するものはあるクラスの非線形方程式の解を記述するものとして広田により考察され、広田は非線形方程式を τ -関数の満たす方程式に置き換えたが、そのとき新しい演算である双線形微分を導入した．その後これは佐藤により τ -関数と名付けられた．この節では τ -関数を定義し、群 $\Gamma(r)$ の作用が τ -関数を通じてどのように解析されるか説明する．後に見るようにすべての重要な量は τ -関数で表現される．

まず $W \in Gr^{(2)}$ に対しては性質 (ii) より

$$W \ni f = f_+ + f_-, \quad f_{\pm} \in H_{\pm}$$

とするとき、 $W \ni f \rightarrow f_+ \in H_+$ は全単射なので、 H_+ から H_- へのある有界作用素 A_W が存在し

$$W = \{f_+ + A_W f_+; \quad f_+ \in H_+\}$$

となる．これにより $g \in \Gamma(r)$ に対して H_+ 上の作用素 R_W を

$$R_W(g) = g^{-1} \mathbf{p}_+ g A_W \tag{30}$$

で定める． $R_W(g)$ は、 g が $|z| = r$ 上なめらかなので、次の補題により trace クラスになる． **τ -関数**は

$$\tau_W(g) = \det(I + R_W(g)) \tag{31}$$

で定める．

補題 4 $g_1, g_2 \in \Gamma(r)$ に対して $g^{-1} \mathbf{p}_+ g$ を H_- から H_+ への作用素とみると、次の評価が成り立つ． $\|\cdot\|$ は H の L^2 -ノルム．

$$\|g_1^{-1} \mathbf{p}_+ g_1 - g_2^{-1} \mathbf{p}_+ g_2\|_{\text{trace}} \leq 3r^{-1/2} \left(\begin{aligned} &\|g_1^{-1} - g_2^{-1}\|_{\infty} (\|g_1 - 1\| + r^2 \|g_1''\|) \\ &+ \|g_2^{-1}\|_{\infty} (\|g_1 - g_2\| + r^2 \|g_1'' - g_2''\|) \end{aligned} \right)$$

特に $g_2 = 1$ とすれば $g_2^{-1} \mathbf{p}_+ g_2 = 0$ なので、 $g_1^{-1} \mathbf{p}_+ g_1$ は trace クラスになる．

証明. $f \in H_-$ と $g_j \in H^2 (|z| = r)$ に対して

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} f_n z^{-n}, \quad g_j(z) = \sum_{n \geq 0} g_{jn} z^n$$

とおくと

$$\begin{aligned} & \partial_\theta (\mathbf{p}_+ g_1 f - \mathbf{p}_+ g_2 f) (r e^{i\theta}) \\ &= i \sum_{m \geq 1, n-m \geq 0} (n-m) r^{n-m} (g_{1,n} - g_{2,n}) f_m e^{i(n-m)\theta} = i \sum_{m \geq 1} f_m \sum_{k \geq 0} k r^k e^{ik\theta} (g_{1,k+m} - g_{2,k+m}) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} & \| (1 + \partial_\theta) (\mathbf{p}_+ g_1 - \mathbf{p}_+ g_2) \|_{\text{HS}}^2 \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| r^{m-1/2} \sum_{k \geq 0} (1 + ik) r^k e^{ik\theta} (g_{1,k+m} - g_{2,k+m}) \right|^2 d\theta \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq m} r^{2k} \left(1 + (k-m)^2 \right) |g_{1,k} - g_{2,k}|^2 \leq \sum_{k \geq 1} r^{2k} k^3 |g_{1,k} - g_{2,k}|^2 \end{aligned}$$

となる. ここで $\sum_{m=1}^k (1 + (k-m)^2) \leq k^3$ を使った. 最後の項は

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} r^{2k} k^3 |g_{1,k} - g_{2,k}|^2 \\ & \leq |r g_{1,1} - r g_{2,1}|^2 + 2 \sum_{k \geq 2} k^2 (k-1)^2 |r^k g_{1,k} - r^k g_{2,k}|^2 \\ & \leq 2r^{-1} \left(\|g_1 - g_2\|^2 + r^4 \|g_1'' - g_2''\|^2 \right) \end{aligned}$$

と評価できる. また

$$\left\| (1 + \partial_\theta)^{-1} \right\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{k \geq 0} |1 + ik|^{-2} \leq 1 + \frac{\pi^2}{6} < 4 < \infty,$$

なので

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_+ g_1 - \mathbf{p}_+ g_2\|_{\text{trace}} \\ & \leq \left\| (1 + \partial_\theta)^{-1} \right\|_{\text{HS}} \| (1 + \partial_\theta) (\mathbf{p}_+ g_1 - \mathbf{p}_+ g_2) \|_{\text{HS}} \\ & \leq 2\sqrt{2} r^{-1/2} (\|g_1 - g_2\| + r^2 \|g_1'' - g_2''\|) \end{aligned}$$

となり, 結局

$$\begin{aligned} & \|g_1^{-1} \mathbf{p}_+ g_1 - g_2^{-1} \mathbf{p}_+ g_2\|_{\text{trace}} \\ & \leq \|g_1^{-1} - g_2^{-1}\|_{\text{op}} \|\mathbf{p}_+ g_1\|_{\text{trace}} + \|g_2^{-1}\|_{\text{op}} \|\mathbf{p}_+ g_1 - \mathbf{p}_+ g_2\|_{\text{trace}} \\ & \leq 3r^{-1/2} \left(\|g_1^{-1} - g_2^{-1}\|_{\infty} (\|g_1 - 1\| + r^2 \|g_1''\|) \right. \\ & \quad \left. + \|g_2^{-1}\|_{\infty} (\|g_1 - g_2\| + r^2 \|g_1'' - g_2''\|) \right) \end{aligned}$$

となり補題は証明される. ■

次に $\tau_W(g)$ の性質を調べることになるが, そのために重要な補題を示しておこう.

補題 5 $\tau_W(g) \neq 0$ は $gW \in Gr^{(2)}$ となる必要十分条件である. このとき gW の A -作用素 A_{gW} は次に与えられる.

$$A_{gW} = \mathbf{p}_- g A_W (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}$$

証明. $R_W(g)$ は trace クラスの作用素なので, $\ker(I + R_W(g)) = \{0\}$ と $\tau_W(g) \neq 0$ は同値であり, さらに逆作用素 $(I + R_W(g))^{-1}$ の存在とも同値である. そこで $f \in \ker(I + R_W(g))$ とすると, $gf + \mathbf{p}_+(g A_W f) = 0$ となるので

$$\mathbf{p}_-(g A_W f) = g A_W f - \mathbf{p}_+(g A_W f) = g(f + A_W f) \in gW$$

となる. したがって $gW \in Gr^{(2)}$ とすれば, $\mathbf{p}_-(g A_W f) = 0$ であり, 上の関係より $f + A_W f = 0$ となるが, これは $f = 0$ を意味する. この逆の主張については以下の A_{gW} の存在から自然に示される. そこで $(I + R_W(g))^{-1}$ が存在するとして

$$B = \mathbf{p}_- g A_W (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}$$

とおく. $f \in H_+$ に対して

$$\begin{aligned} g^{-1}(f + Bf) &= g^{-1}f + g^{-1}\mathbf{p}_- g A_W (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}f \\ &= g^{-1}f + A_W (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}f - R_W(g) (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}f \\ &= (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}f + A_W (I + R_W(g))^{-1} g^{-1}f \end{aligned}$$

が成り立つので, $g^{-1}(f + Bf) \in W$ および $gW \supset \{f + Bf; f \in H_+\}$ が成り立つ. したがって $u \in H_+$ に対して $f = g(I + R_W(g))u \in H_+$ とすると, $g^{-1}(f + Bf) = u + A_W u \in W$ がわかる. したがって

$$gW = \{f + Bf; f \in H_+\}$$

となり, $gW \in Gr^{(2)}$ および $B = A_{gW}$ が示された. ■

これにより次の $\tau_W(g)$ に関する重要な命題が示される.

命題 1 $\tau_W(g)$ は次の性質を満たす.

- (i) $g \in \Gamma(r)$, $W \in Gr^{(2)}$ に対して $gW \in Gr^{(2)}$ と $\tau_W(g) \neq 0$ は同値.
- (ii) $g_1, g_2 \in \Gamma(r)$, $W \in Gr^{(2)}$ に対して, もし $g_1 W \in Gr^{(2)}$ (同じことであるが $\tau_W(g_1) \neq 0$) ならば

$$\tau_W(g_1 g_2) = \tau_W(g_1) \tau_{g_1 W}(g_2) \quad (\text{cocycle property})$$

- (iii) $g = e^h \in \Gamma(r)$ に対して $g_1(z) = e^{h_e(z^2)}$, $g_2(z) = e^{zh_o(z^2)}$ とおくと

$$\tau_W(g) = \tau_W(g_1) \tau_W(g_2)$$

- (iv) $\tau_W(g)$ は Sobolev H^2 -ノルムに関して連続である.

証明. (i) は補題 5 で証明済みである. (ii) を示すために, $g_1 W \in Gr^{(2)}$ を仮定すると, 補題 5 より出る等式

$$\begin{aligned} (g_1 g_2) A_W &= g_2 \mathbf{p}_+ g_1 A_W + g_2 \mathbf{p}_- g_1 A_W \\ &= g_2 g_1 R_W(g_1) + g_2 A_{g_1 W} g_1 (I + R_W(g_1)) \end{aligned}$$

より

$$\mathfrak{p}_+((g_1 g_2) A_W) = g_2 g_1 R_W(g_1) + \mathfrak{p}_+(g_2 A_{g_1 W} g_1 (I + R_W(g_1)))$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned} I + R_W(g_1 g_2) &= I + R_W(g_1) + g_1^{-1} g_2^{-1} \mathfrak{p}_+(g_2 A_{g_1 W} g_1 (I + R_W(g_1))) \\ &= I + R_W(g_1) + g_1^{-1} R_{g_1 W}(g_2) g_1 (I + R_W(g_1)) \\ &= g_1^{-1} (I + R_{g_1 W}(g_2)) g_1 (I + R_W(g_1)) \end{aligned}$$

がわかる。したがって、もし $g_1 W \in Gr^{(2)}$ ならば (ii) が出る。 $g_1 W = W$ となるので、(iii) は (ii) より直ちにしたがう。(iv) は補題 4 と行列式の trace ノルムに関する連続性より直ちにしたがう。■

4.2.2 m -関数と分解

次に τ -関数を用いて W の一つの重要な関数を表示しよう。一番単純な $Gr^{(2)}$ の H_+ は $\{z^n\}_{n \geq 0}$ で生成される。一方、 $\{z^n\}_{n \geq 0}$ は 2 つの元 $\{1, z\}$ に z^2 の掛け算を繰り返すことにより生成される。そこで $W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$\varphi_W = A_W 1, \quad \psi_W = A_W z \in H_-$$

とおくと、 A_W の定義より

$$1 + \varphi_W(z) \in W, \quad z + \psi_W(z) \in W$$

であるが、 W に対する条件 (i) と (ii) により

$$W = \text{線形閉包} \{z^{2n} (1 + \varphi_W(z)), z^{2n} (z + \psi_W(z))\}_{n \geq 0}$$

が示される。したがって W は 2 つの関数 φ_W, ψ_W により定まっていることになり、これらは重要な関数である。まず φ_W と τ -関数の関係を説明しよう。 $|\zeta| > r$ を満たす複素数 ζ に対して、 $\Gamma(r)$ の元 q_ζ を

$$q_\zeta(z) = (1 - z\zeta^{-1})^{-1}$$

とする。 $\Gamma(r)$ の他の元は基本的には $q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} \cdots q_{\zeta_n}$ の形の極限で表されるので q_ζ は基本的な元である。 $f \in H_-$ に対して $q_\zeta f$ を $H_- \oplus H_+$ に対応して分解すると

$$q_\zeta f(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1} f(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1} (f(z) - f(\zeta)) + \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1} f(\zeta)$$

となるので

$$(q_\zeta^{-1} \mathfrak{p}_+ q_\zeta f)(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1} f(\zeta) = f(\zeta)$$

である。したがって、もし $W \in Gr^{(2)}$ ならば、 $f \in H_+$ に対して $A_W f \in H_-$ なので

$$(q_\zeta^{-1} \mathfrak{p}_+ q_\zeta A_W f)(z) = (A_W f)(\zeta) = (A_W f)(\zeta) 1$$

となる。このことは作用素 $q_\zeta^{-1} \mathfrak{p}_+ q_\zeta A_W$ が rank 1 の作用素であることを示しており、 H_+ の元 1 を下に行列式を計算すると

$$\tau_W(q_\zeta) = \det \left(I + q_\zeta^{-1} \mathfrak{p}_+ q_\zeta A_W \right) = 1 + (A_W 1)(\zeta) = 1 + \varphi_W(\zeta) \quad (32)$$

となる。次に2つの ζ_1, ζ_2 に対して $\tau_W(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2})$ を計算してみよう。 $f \in H_-$ に対して

$$\begin{aligned} q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}f(z) &= \left(1 - \frac{z}{\zeta_2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\zeta_1}\right)^{-1} f(z) \\ &= \left(1 - \frac{z}{\zeta_2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\zeta_1}\right)^{-1} (f(z) - f(\zeta_1)) + \left(1 - \frac{z}{\zeta_2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\zeta_1}\right)^{-1} f(\zeta_1) \\ &= q_{\zeta_2}(z) \{q_{\zeta_1}(z) (f(z) - f(\zeta_1)) - q_{\zeta_1}(\zeta_2) (f(\zeta_2) - f(\zeta_1))\} \\ &\quad + q_{\zeta_2}(z) q_{\zeta_1}(\zeta_2) (f(\zeta_2) - f(\zeta_1)) + q_{\zeta_2}(z) q_{\zeta_1}(z) f(\zeta_1) \end{aligned}$$

と分解すると、第1項は H_- に、第2, 3項は H_+ に属するので

$$\left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathbf{p}_{+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}}\right)(z) = q_{\zeta_1}^{-1}(z) q_{\zeta_1}(\zeta_2) (f(\zeta_2) - f(\zeta_1)) + f(\zeta_1)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathbf{p}_{+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}}A_W f\right)(z) &= q_{\zeta_1}^{-1}(z) q_{\zeta_1}(\zeta_2) (A_W f(\zeta_2) - A_W f(\zeta_1)) + A_W f(\zeta_1) \\ &= q_{\zeta_1}(\zeta_2) (A_W f(\zeta_2) - A_W f(\zeta_1)) + A_W f(\zeta_1) \\ &\quad - \frac{z}{\zeta_1} q_{\zeta_1}(\zeta_2) (A_W f(\zeta_2) - A_W f(\zeta_1)) \end{aligned}$$

となり、今度は $q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathbf{p}_{+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}}A_W$ は rank2 の作用素になる。 H_+ の2つの元 $\{1, z\}$ を下に行列式を計算すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathbf{p}_{+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}}A_W 1\right)(z) = q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\varphi_W(\zeta_2) - \varphi_W(\zeta_1)) + \varphi_W(\zeta_1) \\ \quad - \frac{z}{\zeta_1} q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\varphi_W(\zeta_2) - \varphi_W(\zeta_1)) \\ \left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathbf{p}_{+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}}A_W z\right)(z) = q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\psi_W(\zeta_2) - \psi_W(\zeta_1)) + \psi_W(\zeta_1) \\ \quad - \frac{z}{\zeta_1} q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\psi_W(\zeta_2) - \psi_W(\zeta_1)) \end{array} \right.$$

となるので

$$\begin{aligned} &\det \left(I + q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathbf{p}_{+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}}A_W \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\varphi_W(\zeta_2) - \varphi_W(\zeta_1)) + \varphi_W(\zeta_1) & -\frac{1}{\zeta_1} q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\varphi_W(\zeta_2) - \varphi_W(\zeta_1)) \\ q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\psi_W(\zeta_2) - \psi_W(\zeta_1)) + \psi_W(\zeta_1) & 1 - \frac{1}{\zeta_1} q_{\zeta_1}(\zeta_2) (\psi_W(\zeta_2) - \psi_W(\zeta_1)) \end{pmatrix} \\ &= (\zeta_1 - \zeta_2)^{-1} ((\zeta_1 + \psi_W(\zeta_1)) (1 + \varphi_W(\zeta_2)) - (\zeta_2 + \psi_W(\zeta_2)) (1 + \varphi_W(\zeta_1))) \end{aligned}$$

を得る。ここで後で重要になる関数である m -関数を導入する。 $\varphi_W \in H_-$ であるので

$$\varphi_W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$$

と展開できている。 a_1 は W に依存しているので $a_1 = a_1(W)$ とかき

$$m_W(z) = \frac{z + \psi_W(z)}{1 + \varphi_W(z)} + a_1(W) \quad (33)$$

とおき、 m_W を $W \in Gr^{(2)}$ の m -関数と呼ぶ。定数 $a_1(W)$ を加えた理由は $m_W(z) - z$ が $z \rightarrow \infty$ で0に収束させたいためである。より正確には

$$m_W(z) = z + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty \quad (34)$$

が成り立つ. 例 1 の W_m に対しては, $1, m(z) \in W_m$ なので

$$\varphi_{W_m}(z) = 0, \quad z + \psi_{W_m}(z) = m(z), \quad a_1(W_m) = 0$$

となり, $m_W(z) = m(z)$ である. 後ほどこの関数は Schrödinger 作用素の Weyl 関数と関係していることがわかる. さらに (28) で導入した potential u は m_W から定まっていることもわかる. 前に戻ると, m_W により

$$\det \left(I + q_{\zeta_2}^{-1} q_{\zeta_1}^{-1} \mathbf{p}_+ q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} A_W \right) = (1 + \varphi_W(\zeta_1)) (1 + \varphi_W(\zeta_2)) \frac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

つまり

$$\begin{aligned} \tau_W(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}) &= (1 + \varphi_W(\zeta_1)) (1 + \varphi_W(\zeta_2)) \frac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \\ &= \tau_W(q_{\zeta_1}) \tau_W(q_{\zeta_2}) \frac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \end{aligned} \quad (35)$$

を得る.

ここで次の補題を証明を付けずに挙げておこう. $\tau_W(g)$ の連続性と $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} q_\zeta = 1$ となることより, $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau_W(q_\zeta) = \tau_W(1) = 1$ となるので, $|\zeta|$ が十分大きければ $\tau_W(q_\zeta) \neq 0$ となることを注意しておく.

補題 6 ([SK1]) $W \in Gr^{(2)}$ とすると, $|\zeta|$ が十分大きければ次の等式が成立する.

$$m_{q_\zeta W}(z) = \frac{z^2 - \zeta^2}{m_W(z) - m_W(\zeta)} - m_W(\zeta) \quad (36)$$

演算 d_ζ を

$$(d_\zeta m)(z) = \frac{z^2 - \zeta^2}{m(z) - m(\zeta)} - m(\zeta)$$

で定めると, (36) より $m_{q_\zeta W}(z) = (d_\zeta m_W)(z)$ であるが³

$$m_{q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} W}(z) = (d_{\zeta_1} m_{q_{\zeta_2} W})(z) = (d_{\zeta_1} d_{\zeta_2} m_W)(z)$$

となるので, 帰納的に等式

$$m_{q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} \dots q_{\zeta_n} W}(z) = (d_{\zeta_1} d_{\zeta_2} \dots d_{\zeta_n} m_W)(z) \quad (37)$$

がわかる. ちなみに演算 d_ζ は可換である. また, (35) により $\tau_W(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} \dots q_{\zeta_n})$ も計算できることがわかる.

例えば $n = 3$ のときは, 命題 1 の cocycle property により

$$\begin{aligned} \tau_W(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} q_{\zeta_3}) &= \tau_W(q_{\zeta_3}) \tau_{q_{\zeta_3} W}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}) \\ &= \tau_W(q_{\zeta_3}) \tau_{q_{\zeta_3} W}(q_{\zeta_1}) \tau_{q_{\zeta_3} W}(q_{\zeta_2}) \frac{m_{q_{\zeta_3} W}(\zeta_1) - m_{q_{\zeta_3} W}(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \\ &= \tau_W(q_{\zeta_1}) \tau_W(q_{\zeta_2}) \tau_W(q_{\zeta_3}) \frac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_3)}{\zeta_1 - \zeta_3} \frac{m_W(\zeta_2) - m_W(\zeta_3)}{\zeta_2 - \zeta_3} \\ &\quad \times \frac{(d_{\zeta_3} m_W)(\zeta_1) - (d_{\zeta_3} m_W)(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \end{aligned}$$

となる．容易にわかるように $\tau_W(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} \cdots q_{\zeta_n})$ は $\tau_W(q_{\zeta_1}) \tau_W(q_{\zeta_2}) \cdots \tau_W(q_{\zeta_n})$ の部分と m_W のみの演算で得られる部分の積になっている．ここで

$$\begin{aligned} \tau_W(q_{\zeta_1}) \tau_W(q_{\zeta_2}) \cdots \tau_W(q_{\zeta_n}) &= \exp \left(\sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\log \tau_W(q_z)}{\zeta_j - z} dz \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \partial_z \log(q_{\zeta_1}(z) q_{\zeta_2}(z) \cdots q_{\zeta_n}(z)) \log \tau_W(q_z) dz \right) \end{aligned}$$

に注意すれば，一般の $g = e^h \in \Gamma$ に対して

$$\rho_W(g) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} h'(z) \log \tau_W(q_z) dz \right) \quad (38)$$

と定義することを示唆される．そこで新しい τ -関数を

$$\tau_{m_W}(g) = \frac{\tau_W(g)}{\rho_W(g)} \quad (39)$$

で定義すれば， $\tau_{m_W}(g)$ は m_W のみに依存している．

以上の事実を以下の命題として整理しておこう．

命題 2 ([SK1]) $W \in Gr^{(2)}$ に対して $\tau_W(g)$ は次のように分解できる．

$$\tau_W(g) = \rho_W(g) \tau_{m_W}(g)$$

ここで $\tau_{m_W}(g)$ は m_W にのみ依存している．すなわち， $W_1, W_2 \in Gr^{(2)}$ に対して $m_{W_1} = m_{W_2}$ ならば $\tau_{m_{W_1}}(g) = \tau_{m_{W_2}}(g)$ となる．さらに τ_{m_W} は拡張された cocycle の性質

$$\tau_{m_W}(g_1 g_2) = \tau_{m_W}(g_1) \tau_{m_{g_1 W}}(g_2) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} h'_2(z) \log \frac{\tau_{m_W}(g_1 q_z)}{\tau_{m_W}(g_1)} dz \right) \quad (40)$$

をもつ．但し $\tau_{m_W}(g_1) \neq 0$ と仮定し， $g_2 = e^{h_2}$ とした．具体的な g に対しては

$$\begin{cases} \tau_{m_W}(q_\zeta) = 1 \\ \tau_{m_W}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}) = \frac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \\ \tau_{m_W}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} q_{\zeta_3}) = \frac{(d_{\zeta_3} m_W)(\zeta_1) - (d_{\zeta_3} m_W)(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \end{cases}$$

となる． $\tau_{m_W}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} \cdots q_{\zeta_n})$ も (37) を使い帰納的に求められる．

証明． (40) を示そう． $\tau_W(g_1) \neq 0$ とすると

$$\tau_{m_W}(g_1 g_2) = \frac{\tau_W(g_1 g_2)}{\rho_W(g_1 g_2)} = \frac{\tau_W(g_1) \tau_{g_1 W}(g_2)}{\rho_W(g_1) \rho_W(g_2)} = \tau_{m_W}(g_1) \tau_{g_1 m_W}(g_2) \frac{\rho_{g_1 W}(g_2)}{\rho_W(g_2)}$$

となる．ここで ρ_W の定義と， τ_W の cocycle property により

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{g_1 W}(g_2)}{\rho_W(g_2)} &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} h'_2(z) \log \frac{\tau_{g_1 W}(q_z)}{\tau_W(q_z)} dz \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} h'_2(z) \log \frac{\tau_W(g_1 q_z)}{\tau_W(g_1) \tau_W(q_z)} dz \right) \end{aligned}$$

となる。一方

$$\frac{\tau_W(g_1 q_z)}{\tau_W(g_1) \tau_W(q_z)} = \frac{\rho_W(g_1) \rho_W(q_z) \tau_{m_W}(g_1 q_z)}{\rho_W(g_1) \tau_{m_W}(g_1) \rho_W(q_z)} = \frac{\tau_{m_W}(g_1 q_z)}{\tau_{m_W}(g_1)}$$

となるので証明が終わる。 ■

次に (28) で導入した potential u を τ -関数で表現しよう。一パラメータ群 $\{e_x\}_{x \in \mathbb{C}} \subset \Gamma(r)$ を

$$e_x(z) = e^{xz}$$

とする。

補題 7 $\mathbb{C}$ のある領域 D 上で $\tau_W(e_x) \neq 0$ とする。このとき

$$f_W(x, \zeta) = e^{-x\zeta} (1 + \varphi_{e_x W}(\zeta)) = e^{-x\zeta} \tau_{e_x W}(q_\zeta) \in W \quad (\zeta \text{ の関数として}) \quad (41)$$

は Schrödinger 方程式

$$-f_W''(x, z) + u_W(x) f_W(x, z) = -z^2 f_W(x, z) \quad (42)$$

を満たす。さらに $\{a_n(x)\}_{n \geq 1}$ を以下の展開

$$f_W(x, z) = e^{-xz} \left(1 + \frac{a_1(x)}{z} + \frac{a_2(x)}{z^2} + \cdots \right) \quad (43)$$

の係数とすると

$$a_1(x) = \partial_x \log \tau_W(e_x)$$

となり、ポテンシャル u_W は次の式で与えられる。

$$u_W(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_W(e_x) \quad (44)$$

また $D \ni 0$ なら m -関数は以下で与えられる。

$$m_W(z) = -\frac{f_W'(0, z)}{f_W(0, z)} \quad (45)$$

証明. $x \in D$ に対して $e_x W \in Gr^{(2)}$ となっているので、 $f \in e_x W$ で $\mathbf{p}_+ f = 1$ を満たすものが唯一存在する。それにより $f_W(x, z) = e_x^{-1} f \in W$ とおくと、(27) で示したように f_W は方程式 (42) を満たすことがわかる。式 (44) は以下のように示される。

$$e^{x\zeta} f_W(x, \zeta) = 1 + (A_{e_x W} 1)(\zeta) = \tau_{e_x W}(q_\zeta) = \frac{\tau_W(e_x q_\zeta)}{\tau_W(e_x)}$$

となっているので

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta (e^{x\zeta} f_W(x, \zeta) - 1) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta \frac{\tau_W(e_x q_\zeta) - \tau_W(e_x)}{\tau_W(e_x)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta \frac{\tau_W(e_{x+\zeta^{-1}}) - \tau_W(e_x)}{\tau_W(e_x)} = \partial_x \log \tau_W(e_x) \end{aligned}$$

がわかり、(44) が示される。

(43) の両辺を x で微分すると

$$f_W'(0, z) = -z \left(1 + \frac{a_1(0)}{z} + \frac{a_2(0)}{z^2} + \cdots \right) + \frac{a_1'(0)}{z} + \frac{a_2'(0)}{z^2} + \cdots$$

となるが, $f'_W(0, z) \in W$ なので

$$f'_W(0, z) = -z - \psi_W(z) - a_1(0)\varphi_W(z)$$

を得る. 一方, $f_W(0, z) = 1 + \varphi_W(z)$ なので (45) を得る. ■

記事 3 式 (44) は $W \in Gr^{(2)}$ に対応する potential を τ -関数の言葉で与えている. これを (39) で与えた新しい τ -関数の言葉で記述してみよう. ρ_W の定義 (38) より

$$\rho_W(e_x) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} x \log \tau_W(q_z) dz\right) = e^{cx}$$

となるので

$$u_W(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_W(e_x) = -2\partial_x^2 \log \tau_{m_W}(e_x) \quad (46)$$

を得る. つまり potential u_W は m -関数 m_W から定まっている. potential を新しい τ -関数 τ_{m_W} により表現したこの (46) は初期値のクラスを拡張する場合に重要になる. つまり, $\tau_W(g)$ の $\rho_W(g)$ の部分は拡張する際に発散するが, $\tau_{m_W}(g)$ は有限にとどまる.

$f_W(x, z)$ は **Baker-Akhiezer 関数** と呼ばれ $e^{xz} f_W(x, z)$ が z の関数として ∞ で正則になる Schrödinger 方程式の解である. 代数幾何的な議論をする場合によく登場する. potential が急減少する場合には前に構成した Jost 解と一致する.

4.3 KdV-flow の実現

この節では $W \in Gr^{(2)}$ のクラスを制限すれば $\tau_W(g) \neq 0$ が少なくとも実の g に対しては常に成立することを示し, そのようなクラス上で KdV-flow が定義できることを示す.

前節で例 1 の関数 m から生成される $W_m \in Gr^{(2)}$ に対してはその m -関数 m_W は m になることを注意した. ここでは例 1 の条件を強くし

$$\mathcal{M}_r^{refl} = \left\{ m ; \begin{array}{l} m \text{ は } \mathbb{C} \setminus ([-r, r] \cup i[-r, r]) \text{ で正則で } m(z) = \overline{m(\bar{z})} \\ m(z) = z + O(z^{-1}) \text{ かつ } \operatorname{Im} m(z) / \operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right\} \quad (47)$$

とおく. $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ なら $m_o(z) = 1 + O(z^{-1})$ が成り立つので, $|z|$ が十分大きなすべての z に対して $m_o(z) \neq 0$ となり, 条件 (23) は十分大きい r に取り直せば成り立つ. この節ではこの $\mathcal{M}_r^{refl}$ 上で

$$\Gamma_{\text{real}}(r) = \Gamma(r) \cap \{z \in \mathbb{R} \text{ に対しては } g(z) \in \mathbb{R}\}$$

が閉じた形で作用することを示す. そのために以下の補題を証明を付けずに挙げておく.

補題 8 ([SK1]) $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$ で正則な m が条件

$$\frac{\operatorname{Im} m(z)}{\operatorname{Im} z} > 0 \quad (48)$$

をみたすとする. このとき $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$ に対して $d_{\bar{\zeta}} d_{\zeta} m$ は再び m と同じ性質, つまり $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$ で正則になり, 性質 (48) をもつ.

これにより次の定理が示せる.

定理 3 ([SK1]) $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ とすると, $g \in \Gamma_{\text{real}}(r)$ に対して $gW_m \in Gr^{(2)}$ となり, $m_{gW_m} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかる.

証明. $W = W_m$ と簡略化する. $m_W = m$ であることを注意しておく. $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i[-r, r])$ に対して $g = q_{\bar{\zeta}}q_{\zeta}$ のときは命題 2 より $\text{Im} \zeta \neq 0$ なら

$$\tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}}q_{\zeta}) = \frac{m(\zeta) - m(\bar{\zeta})}{\zeta - \bar{\zeta}} = \frac{\text{Im} m(\zeta)}{\text{Im} \zeta} > 0$$

となる. また $m_{q_{\bar{\zeta}}q_{\zeta}W}(z) = d_{\bar{\zeta}}d_{\zeta}m_W(z)$ であるので, 補題 8 より $m_{q_{\bar{\zeta}}q_{\zeta}W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかる (細かい点が残るが [SK1] を参照). さらに cocycle property より

$$\begin{aligned} \tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}q_{\bar{\zeta}_2}q_{\zeta_2}) &= \tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}) \tau_{q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}m_W}(q_{\bar{\zeta}_2}q_{\zeta_2}) \\ &\quad \times \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left(\log q_{\bar{\zeta}_2}(z) q_{\zeta_2}(z) \right)' \log \frac{\tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}qz)}{\tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1})} dz \right) \end{aligned}$$

となるので, $\tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}q_{\bar{\zeta}_2}q_{\zeta_2}) > 0$ がわかる.

$$m_{q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}q_{\bar{\zeta}_2}q_{\zeta_2}W}(z) = d_{\bar{\zeta}_1}d_{\zeta_1}d_{\bar{\zeta}_2}d_{\zeta_2}m_W(z)$$

なので, 再び補題 8 より $m_{q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1}q_{\bar{\zeta}_2}q_{\zeta_2}W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかる. あとは帰納的に $\tau_{m_W}(q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1} \cdots q_{\bar{\zeta}_n}q_{\zeta_n}) > 0$, $m_{q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1} \cdots q_{\bar{\zeta}_n}q_{\zeta_n}W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ が任意の $n \geq 1$ に対して示される. したがって $g = q_{\bar{\zeta}_1}q_{\zeta_1} \cdots q_{\bar{\zeta}_n}q_{\zeta_n}$ のときにはこの定理の主張は示せた. 一般の $g = e^h \in \Gamma_{\text{real}}$ に対しては, 実多項式 h_n を適当に選び

$$g_n(z) = \left(1 - \frac{h_n(z)}{n} \right)^{-n}$$

が $\{|z| \leq r\}$ のある近傍で一様収束するように選ぶ. ただし $1 - h_n(z)/n$ は実の零点を持たないようにしておく. h_n は多項式で $h_n(z) = \overline{h_n(\bar{z})}$ を満たすので, g_n は $\{q_{\bar{\zeta}}q_{\zeta}, \text{Im} \zeta \neq 0\}$ の有限積で表現できる.

$$m_{g_nW} \in \mathcal{M}_r^{refl} \tag{49}$$

であることはすでにわかっている. そこで $\tau_W(g) \neq 0$ の場合をまず考える. (35) と $\tau_W(g)$ の cocycle property より

$$m_{g_nW}(z) = z + \int_{\infty}^z \left(\frac{\tau_{g_nW}(q_{\zeta}^2)}{\tau_{g_nW}(q_{\zeta})^2} - 1 \right) d\zeta = z + \int_{\infty}^z \left(\frac{\tau_W(g_nq_{\zeta}^2)\tau_W(g_n)}{\tau_W(g_nq_{\zeta})^2} - 1 \right) d\zeta$$

が成り立つことに注意する. $n \rightarrow \infty$ とすると, $\tau_W(g)$ の連続性により

$$\tau_W(g_nq_{\zeta}^2), \tau_W(g_nq_{\zeta})^2 \rightarrow \tau_W(gq_{\zeta}^2), \tau_W(gq_{\zeta})^2$$

がわかるので, $|\zeta|$ が大きいときこの収束の評価を少し精密にしておくと, $|z|$ が大きいときには $m_{g_nW}(z)$ が $m_{gW}(z)$ に収束することがわかる. このことと (49) より $m_{g_nW}(z)$ は $\mathbb{C} \setminus ([-r, r] \cup i[-r, r])$ 上で正則関数列として $m_{gW}(z)$ に収束することがわかる. したがって $m_{gW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ となる. まだ $\tau_W(g) \neq 0$ の証明が残っている. $gg_n^{-1} \rightarrow 1$ なので $\tau_W(g)$ の連続性により $\tau_W(gg_n^{-1}) \rightarrow \tau_W(1) = 1$ となり, 十分大きな n に対

しては $\tau_W(gg_n^{-1}) \neq 0$ ($\tau_{m_W}(gg_n^{-1}) \neq 0$ と同値) となることがわかる. 再び $\tau_W(g)$ の cocycle property を利用する.

$$\tau_W(g) = \tau_W(gg_n^{-1}g_n) = \tau_W(gg_n^{-1})\tau_{gg_n^{-1}W}(g_n)$$

において $\tau_W(gg_n^{-1}) \neq 0$ なので, $m_{gg_n^{-1}W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかっている, この証明の初めの部分の議論により $\tau_{gg_n^{-1}W}(g_n) \neq 0$ がわかり, 証明が完結する. ■

この定理により $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$, $g \in \Gamma_{\text{real}}(r)$ に対して $m_{gW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ (但し $W = W_m$) となっているので $\Gamma_{\text{real}}(r)$ の $\mathcal{M}_r^{refl}$ への作用を

$$g \cdot m = m_{gW} \quad (50)$$

で定めることが出来る. これが空間 $\mathcal{M}_r^{refl}$ 上の KdV-flow になっている. というのは $q(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$ により u を定め

$$(K(g)q)(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_{g \cdot m}(e_x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(g e_x) \quad (51)$$

とすればよいからである. τ_m の拡張された cocycle property が $K(g)$ の flow-property: $K(g_1g_2) = K(g_1)K(g_2)$ を与える.

4.4 τ -関数の m -関数による再表示

この節では後に必要となる τ_m の元の定義の表示 (39) を Weyl 関数に関係した積分作用素の Fredholm 行列式による表示に書き直すことを考える.

区間 $[-r, r]$ を囲むめらかな単純閉曲線を C, C' とする. 向きは反時計向きである. 状況は下図を参照いただきたい.

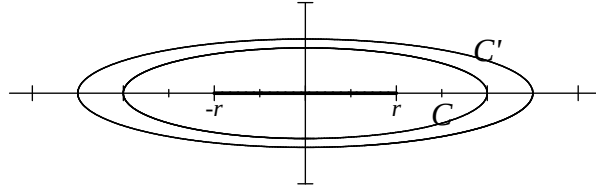


図 3

正則関数 δ を δ_e, δ_o が C' を含む単連結領域で正則になる任意の関数とし,

$$\tilde{m}(z) = m(z) - \delta(z)$$

とおく. そして積分核および積分作用素を以下のように定める.

$$\begin{cases} N_{g,m}(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\hat{g}_o(\lambda') (g\tilde{m})_e(\lambda) + \hat{g}_e(\lambda') (g\tilde{m})_o(\lambda)}{(\lambda' - z)(\lambda - \lambda')} m_o(\lambda')^{-1} d\lambda' \\ (N_m(g)f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C N_{g,m}(z, \lambda) f(\lambda) d\lambda. \end{cases} \quad (52)$$

ここで $\hat{g}(z) = g(z)^{-1}$ とした. 作用素 $N_m(g)$ は $L^2(C)$ 上の trace クラス作用素を定義する.

定理 4 $m \in \mathcal{M}_{\sqrt{r}}^{refl}$, $g \in \Gamma_{\text{real}}(r)$ に対して $\tau_m(g)$ は以下のように表せる.

$$\tau_m(g) = \det(I + N_m(g))$$

証明. $m \in \mathcal{M}_{\sqrt{r}}^{refl}$ に対して W_m に対応する $\mathbf{H}$ での閉部分空間は

$$\mathbf{W}_m = A(z)\mathbf{H}_+, \quad A(z) = \begin{pmatrix} 1 & m_e(z) \\ 0 & m_o(z) \end{pmatrix}$$

であった。 τ -関数を計算するためには、まず $\mathbf{H}$ で $A\mathbf{W}_m$ の表現を求めなければならない。そこで

$$\mathbf{W}_m \ni A(z)\mathbf{f} = \mathbf{f}_+ + \mathbf{f}_-, \quad (\mathbf{f} \in \mathbf{H}_+, \quad \mathbf{f}_{\pm} \in \mathbf{H}_{\pm})$$

と分解するとき

$$\mathbf{f}_+ = \mathbf{p}_+ A(z)\mathbf{f} = T(A)\mathbf{f}$$

であるので

$$A\mathbf{W}_m\mathbf{f}_+ = \mathbf{f}_- = A(z)\mathbf{f} - \mathbf{f}_+ = A(z)T(A)^{-1}\mathbf{f}_+ - \mathbf{f}_+ \quad (53)$$

となる。ここで

$$T(A)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -T(m_e)T(m_o^{-1}) \\ 0 & T(m_o^{-1}) \end{pmatrix} \quad (54)$$

であったことを注意しておく。 $R_W(g) = g^{-1}\mathbf{p}_+gA\mathbf{W}_m$ は $\mathbf{H}_+$ 上では $G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m$ に替わる。ただし

$$G = \begin{pmatrix} g_e(z) & zg_o(z) \\ g_o(z) & g_e(z) \end{pmatrix}$$

である。したがって τ -関数は

$$\tau_m(g) = \tau_{W_m}(g) = \det(I + G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m)$$

となる。 $\mathbf{H}_+$ の元 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。 (53), (54) より $\mathbf{f} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 \in \mathbf{H}_+$ に対して

$$\begin{aligned} A\mathbf{W}_m\mathbf{f} &= (f_1 - T(m_e)T(m_o^{-1})f_2 + m_eT(m_o^{-1})f_2)\mathbf{e}_1 + m_oT(m_o^{-1})f_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{f} \\ &= \mathbf{p}_-m_eT(m_o^{-1})f_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{p}_-m_oT(m_o^{-1})f_2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m\mathbf{f} &= G^{-1}\mathbf{p}_+G\mathbf{p}_-m_eT(m_o^{-1})f_2\mathbf{e}_1 + G^{-1}\mathbf{p}_+G\mathbf{p}_-m_oT(m_o^{-1})f_2\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (55)$$

となる。直交射影 π_1, π_2 を

$$\pi_1\mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1, \quad \pi_2\mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

とすると、 (55) より $G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m\pi_1 = 0$ がわかり

$$I + G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m = \begin{pmatrix} I_1 & \pi_1G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m\pi_2 \\ 0 & I_2 + \pi_2G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m\pi_2 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$\tau_{W_m}(g) = \det(I_2 + \pi_2G^{-1}\mathbf{p}_+GA\mathbf{W}_m\pi_2)$$

である。一方, (55) より ($\hat{g} = g^{-1}$)

$$\begin{aligned}
& \pi_2 G^{-1} \mathbf{p}_+ G A \mathbf{W} \pi_2 \\
&= ((\hat{g}_o \mathbf{p}_+ g_e + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_o) \mathbf{p}_- m_e + (\hat{g}_o \mathbf{p}_+ z g_o + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_e) \mathbf{p}_- m_o) T(m_o^{-1}) \\
&= ((\hat{g}_o \mathbf{p}_+ g_e + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_o) m_e + (\hat{g}_o \mathbf{p}_+ z g_o + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_e) m_o) T(m_o^{-1}) \\
&\quad - ((\hat{g}_o \mathbf{p}_+ g_e + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_o) T(m_e) + (\hat{g}_o \mathbf{p}_+ z g_o + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_e) T(m_o)) T(m_o^{-1}) \\
&= ((\hat{g}_o \mathbf{p}_+ g_e + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_o) m_e + (\hat{g}_o \mathbf{p}_+ z g_o + \hat{g}_e \mathbf{p}_+ g_e) m_o) T(m_o^{-1}) - I \\
&= (\hat{g}_o T((gm)_e) + \hat{g}_e T((gm)_o) - T(m_o)) T(m_o^{-1})
\end{aligned}$$

となるので, τ_m は結局

$$\tau_m(g) = \det(I + (\hat{g}_o T((gm)_e) + \hat{g}_e T((gm)_o) - T(m_o)) T(m_o^{-1})) \quad (56)$$

$[-s, s]$ は C の中にあるように $s > r$ をとり, 積分関数の正則性を利用して積分路を変形する. $f \in H_+$ と C' の内部にある z に対して

$$\begin{aligned}
T(m_o^{-1}) f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda'|=s} \frac{m_o(\lambda')^{-1} f(\lambda')}{\lambda' - z} d\lambda' \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{m_o(\lambda')^{-1} f(\lambda')}{\lambda' - z} d\lambda' \equiv T f(z)
\end{aligned}$$

となる. また, $|z| \leq s$ を満たす z に対して

$$\begin{aligned}
& (\hat{g}_o T((gm)_e) + \hat{g}_e T((gm)_o) - T(m_o)) f(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=s} \frac{\hat{g}_o(z)(gm)_e(\lambda) + \hat{g}_e(z)(gm)_o(\lambda) - m_o(\lambda)}{\lambda - z} f(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\hat{g}_o(z)(gm)_e(\lambda) + \hat{g}_e(z)(gm)_o(\lambda) - m_o(\lambda)}{\lambda - z} f(\lambda) d\lambda \equiv S f(z)
\end{aligned}$$

である. ここで作用素 S は m を下の $\tilde{m}$ に置き換えても変わらないことに注意する.

$$\tilde{m}(z) = m(z) - \delta(z)$$

作用素 S, T はそれぞれ $L^2(C)$ から $H_+ (= H_+ (|z| = s))$, H_+ から $L^2(C)$ への作用素と理解している. このとき行列式の可換性を利用すれば, (56) より

$$\tau_m(g) = \det(I + ST) = \det(I + TS)$$

を得る. 作用素 $TS : L^2(C) \rightarrow L^2(C)$ は

$$(TSf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda' - z} d\lambda' \frac{1}{2\pi i} \int_C L_g(\lambda', \lambda) f(\lambda) d\lambda$$

である. ただし

$$L_g(z, \lambda) = \frac{\hat{g}_o(z)(g\tilde{m})_e(\lambda) + \hat{g}_e(z)(g\tilde{m})_o(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{m_o(\lambda)}{\lambda - z}.$$

ここで C' の内部にある z, λ に対して

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda' - z} \frac{m_o(\lambda)}{\lambda - \lambda'} d\lambda' \\
&= \frac{m_o(\lambda)}{\lambda - z} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \left(\frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda' - z} + \frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda - \lambda'} \right) d\lambda' = 0
\end{aligned}$$

となることに注意すると，等式

$$(TSf)(z) = (N_m(g)f)(z)$$

を得，証明が終わる． ■

この表示式において左の $-r$ を $-\infty$ にもって行くことにより τ_m の定義が拡張することが次の目標になる．その前に重要な m -関数に対応する Schrödinger 作用素の何を意味するのか明らかにしなければならない．それで次節では Schrödinger 作用素のスペクトル理論について必要な範囲で説明する．

4.5 m -関数と Weyl 関数

この節では m -関数と Weyl 関数が同一のものであることを示す．

$q(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数で $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ とする． q を potential とする Schrödinger 作用素 $L_q = -\partial_x^2 + q$ に関して，境界 $+\infty$ は Weyl 円板の極限が円板になる場合の極限円型と一点になる場合の極限点型の 2 つに分類される．これに関して次の補題が知られている．

補題 9 Σ を L_q のスペクトル集合とする．

(i) **極限点型**： この場合，任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ に対して方程式

$$L_q \varphi = z\varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$$

の解全体は 1 次元である．

(ii) **極限円型**： この場合，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して方程式

$$L_q \varphi = z\varphi, \quad \varphi \in L^2([0, \infty))$$

の解全体は 2 次元である．この場合 $L_q|_{\mathbb{R}_+}$ のスペクトルは離散的な固有値からなっている．

Weyl 関数 $m_{\pm}$ は $\mathbb{R}$ のボレル集合 F に対して

$$m_+(\lambda + i0) = \overline{-m_-(\lambda + i0)} \quad \text{for a.e. } \lambda \in F$$

を満たすとき F 上**無反射**であるという．これは potential が急減少する場合の通常は無反射性の拡張である．さて前節の m -関数と Weyl 関数との関係を見よう．

補題 10 $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ に対して potential q を

$$q(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$$

で決める．このとき対応する Schrödinger 作用素 L_q は $\pm\infty$ で極限点型であり，その Weyl 関数 $m_{\pm}$ は

$$m_+(-z^2) = -m(z), \quad m_-(-z^2) = m(z) \quad (57)$$

となる．また L_q は $[r^2, \infty)$ で無反射であり， L_q のスペクトルは $[-r^2, \infty)$ に含まれる．

証明． 補題 7 により Baker-Akhiezer 関数 $f_W(x, \zeta)$ は potential q に対する Schrödinger 方程式の解であり， $f_W(x, \zeta) = e^{-x\zeta} \tau_{e_x W}(q_\zeta)$ で与えられる．また

$$f_{e_x W}(y, \zeta) = e^{-y\zeta} \tau_{e_x e_y W}(q_\zeta) = e^{-y\zeta} \tau_{e_{x+y} W}(q_\zeta) = e^{x\zeta} f_W(x+y, \zeta)$$

に注意すると、(45) より

$$m_{e_x W}(\zeta) = -\frac{f'_{e_x W}(0, \zeta)}{f_{e_x W}(0, \zeta)} = -\frac{e^{x\zeta} f'_W(x, \zeta)}{e^{x\zeta} f_W(x, \zeta)} = -\frac{f'_W(x, \zeta)}{f_W(x, \zeta)}$$

となるので

$$f_W(x, \zeta) = f_W(0, \zeta) \exp \left(- \int_0^x m_{e_y W}(\zeta) dy \right) \quad (58)$$

と表せる．一方、定理 3 より、 $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ ならば、任意の $g \in \Gamma_{\text{real}}(r)$ に対して $g \cdot m = m_{gW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ ($W = W_m$) となるので、 $g = e_x$ として定理を摘要すれば $m_{e_y W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ である．詳細は [SK1] を参照していただきたいが、このときある $r_0 > r$ が存在して、すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して $m_{e_y W}(\zeta)$ は $|\zeta| > r_0$ で零点を持たないことがわかる．そこで、 $|x|$ が大きければ $m_{e_y W}(x) \sim x$ に注意すると、 $a > r_0$ を固定し、 $\zeta = \pm a$ とおけば

$$\begin{cases} m_{e_y W}(a) > 0 & \forall y \in \mathbb{R} \\ m_{e_y W}(-a) < 0 & \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

がわかる．したがって (58) より

$$\begin{cases} f_W(x, a) \text{ は正の減少解} \\ f_W(x, -a) \text{ は正の増加解} \end{cases}$$

となり、補題 9 より $\pm\infty$ は極限点型であること、および $f_W(x, a) = f_+(x, -a^2)$, $f_W(x, -a) = f_-(x, -a^2)$ がわかる．これが任意の $a > r_0$ で成立するので、正則性より

$$f_W(x, z) = f_+(x, -z^2) \quad \text{if } \operatorname{Re} z > 0, \quad f_W(x, -z) = f_-(x, -z^2) \quad \text{if } \operatorname{Re} z < 0$$

cz を得る．したがって

$$m_+(-z^2) = \frac{f'_W(0, z)}{f_W(0, z)} = -m(z) \quad \text{if } \operatorname{Re} z > 0, \quad m_-(-z^2) = -\frac{f'_W(0, z)}{f_W(0, z)} = m(z) \quad \text{if } \operatorname{Re} z < 0$$

がわかる．無反射性は m の正則性より自明である． ■

逆に、potential q が $[r^2, \infty)$ で無反射であり、 L_q のスペクトルは $[-r^2, \infty)$ に含まれるなら $m_{\pm}$ から作られる m は $\mathcal{M}_r^{refl}$ の元であることは容易に示すことが出来るので、 $\mathcal{M}_r^{refl}$ はそのような potential 全体と同一視できる．定理 3 は、実はそのような potential のクラス上で KdV-flow が定義できることを示している．とはいえそのような potential が実際どのようなものであるかは自明ではない．表示式

$$q(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$$

において、 x を複素数とみなすことも可能であり、そのとき $\tau_m(e_x) = 0$ となる x で q は 1 次の極をもつことになる．したがって q は $\mathbb{C}$ で有理型 (meromorphic) な関数である．さらに Lundin は u は実軸を含むある帯状領域で正則で一様な評価を持つことを示している．このように $\mathcal{M}_r^{refl}$ に対応する potential は非常に制限が付く．しかし、このクラスは n -soliton を含んでおり、さらに θ -関数で与えられる代数幾何的な準周期的 potential も含んでいる．

$m_{\pm}$ から (57) によって定まる m が $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ ならば、対応する potential q は $q(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$ で与えられるが、より一般の $m_{\pm}$ から potential を決める問題はスペクトル逆問題と呼ばれており、1950 年代初めに Gelfand-Levitan により解かれた．その場合 $m_{\pm}$ の条件が対応するスペクトル測度で与えられているので我々にとっては不都合であるが、どんな場合でも与えられた $m_{\pm}$ に potential が対応していればそれは一意的であることは知られている．

5 KdV flow の拡張 (定理 1 の証明)

KdV flow に関係する重要な量はすべて τ -関数で表現できる. 定理 4 では τ -関数は Weyl 関数を積分核に用いた積分作用素の Fredholm 行列式で表示した. これにより容易に τ -関数を拡張する方向が定まる. これが実現されると, KdV flow をより広いクラスの初期値関数に拡張することが可能である. 問題は, 拡張された τ -関数により KdV 方程式の解が構成できるかということで, $\mathcal{M}_r^{refl}$ の場合と並行した議論が可能か判断としない. そのために $\mathcal{M}_n^N$ の元を $\mathcal{M}_r^{refl}$ の元で近似し, $\mathcal{M}_r^{refl}$ に対して成り立つことが $\mathcal{M}_n^N$ の場合にも成り立つことを示すことにより KdV flow の拡張を完成させる. この節ではその証明について述べるが, 技術的にはかなりの計算を要するので, ここではその骨格を述べるにとどめ, 証明の詳細は [SK2] に譲る.

証明の要点と手順は以下の通りである.

1. 必要な初期値空間の設定し τ -関数を拡張する. この部分は比較的容易である.
2. τ -関数の**非退化性** ($\tau_m(g) \neq 0$) を示すことが KdV flow 拡張の要であり, そのために以下の段階を経る.
 - (a) 一般の m -関数をもつ m -関数で近似
 - (b) m -関数への Γ -作用の拡張
 - (c) τ -関数の拡張された cocycle 性の証明
3. τ -関数の微分可能性
4. KdV flow の拡張の完成

5.1 初期値空間の設定と性質

定理 4 の前の図 4.4 の C, C' を図 3 のように左に $-\infty$ まで引き伸ばしたいのである. その場合, $g(z) = e^{cz^n}$ に対して g_e, g_o が有界になるように C, C' の形を決める. 曲線のパラメータ付を

$$x + i(-x)^{-\alpha}$$

とすれば, $g(z) = e^{cz^n}$ ($c \in \mathbb{R}$) に対しては, $x \rightarrow -\infty$ では

$$z^{n/2} = \left(x + i(-x)^{-\alpha} \right)^{n/2} = -i(-x)^{n/2} - \frac{n}{2}(-x)^{-\alpha-1+n/2} + o(|x|^{-1+n/2})$$

となることに注意すれば, 曲線 C, C' は $\alpha \geq n/2 - 1$ と選べばよいことになる. 定理 4 で δ を自由に選ぶ選択肢を残したが, その理由は $N_m(g)$ を trace クラスにするためには g_e, g_o が有界というだけでは不十分で核の十分な可積分性が必要になるからである. そのためには δ を適当に選んで $m_e - \delta_e, m_o - \delta_o$ が $z \rightarrow \infty$ のとき速く 0 に収束するようにしなければならない. この理由で空間 $\Phi_n^N, \mathcal{M}_n^N$ を (8), (10) により導入した. $u \in \Phi_n^N, f \in H(D_\omega^+), z \in D_\omega^-$ に対しては, Cauchy の積分定理により

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\omega} \frac{u(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\omega} \frac{u(\lambda) - f(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda \quad (59)$$

となる. そこで Φ_n^N に norm

$$\|u\|_{n,N} = \inf_{f \in H(D_\omega^+)} \sqrt{\int_{C_\omega} |z|^{2N} |u(z) - f(z)|^2 |dz|} \quad (60)$$

を導入する。 $\|u\|_{n,N} = 0$ とすると、 $u = 0$ となることは (59) より容易に示すことが出来る。他の norm の性質は容易に確かめることが出来るので、これは Φ_n^N 上の **norm** になる。

Φ_n^N の定義は ω に依存している。つまり、 ω_1, ω_2 が

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^{n/2-1} \omega_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^{n/2-1} \omega_2(x)$$

を満たすとしても $H(D_{\omega_1}^-) \neq H(D_{\omega_2}^-)$ となる可能性があるので、 Φ_n^N も基礎になる曲線が ω_1 か ω_2 かにより異なる可能性がある。しかし、Fredholm 行列式は等しくなるので、 τ -関数の拡張には障害にはならない。

以上により対象とする potential q のクラスを定義することが出来る。 q に対応する Schrödinger 作用素 L_q の Weyl 関数を $m_{\pm}$ とし、補題 10 の (57) を参考にして、 m を

$$m(z) = \begin{cases} -m_+(-z^2) & \text{if } \operatorname{Re} z > 0 \\ m_-(-z^2) & \text{if } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases} \quad (61)$$

と定め、奇数 $n \geq 1$, $N > 0$ に対して

$$\mathcal{M}_n^N = \left\{ m; \quad m_e \in \Phi_n^N, \quad m_o - 1 \in \Phi_n^{N+1/2} \right\} \quad (62)$$

とおく。大まかに言ってパラメータ N は potential の滑らかさを表し、 n は対象とする KdV 方程式系の階数 (最高次の微分階数) を表している。シフトは $n = 1$, 通常の KdV 方程式は $n = 3$ である。 $\mathcal{M}_n^N$ には Φ_n^N の norm により自然に距離

$$d(m_1, m_2) = \|m_{1,e} - m_{2,e}\|_{n,N} + \|m_{1,o} - m_{2,o}\|_{n,N+1/2} \quad (63)$$

が入る。 $n' > n$ なら $\mathcal{M}_{n'}^N \subset \mathcal{M}_n^N$ であり、この**埋め込みは連続**である。

$m \in \mathcal{M}_n^N$ が与えられると $m_{\pm}$ が (61) より決まり、 $m_{\pm}$ から Gelfand-Levitan の逆問題により potential q を決めれば、 $\mathcal{M}_n^N$ に対応する potential のクラスが定まる。 $m_{\pm}$ から potential の決定問題 (逆問題) は、定理 1 を $g = 1$ のときに適用しても可能なことになる。

5.2 τ -関数の拡張

まず g のクラスを、奇数の自然数 n に対して

$$\Gamma_n = \left\{ g = re^h; \quad \begin{array}{l} h \text{ は次数 } n \text{ 以下の実多項式で } h(z) = -h(-z) \\ r \text{ は } \mathbb{R} \text{ に極と零点をもたない有理関数} \end{array} \right\}$$

と設定する。 $m \in \mathcal{M}_n^N$, $g \in \Gamma_n$ に対して τ -関数を定めよう。そのために $c > 1$ に対して $C = C_{\omega}$, $C' = C_{c\omega}$ とする。この場合 $\omega(x) \sim (-x)^{-n/2+1}$ としている。 $L^2(C)$ 上の積分核 $N_{g,m}(z, \lambda)$ を (52) に倣い

$$N_{g,m}(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\widehat{g}_o(\lambda') (g\widetilde{m})_e(\lambda) + \widehat{g}_e(\lambda') (g\widetilde{m})_o(\lambda)}{(\lambda' - z)(\lambda - \lambda')} m_o(\lambda')^{-1} d\lambda' \quad (64)$$

とおき、 $L^2(C)$ 上の積分作用素を

$$N_m(g)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C N_{g,m}(z, \lambda) f(\lambda) d\lambda$$

で定義する。ただし $m \in \mathcal{M}_n^N$ なので、さしあたり N は十分大きいとする。このとき $m_e \in \Phi_n^N$, $m_o - 1 \in \Phi_n^{N+1/2}$ なので、ある $f_1, f_2 \in H(D_{\omega}^+)$ が存在し

$$\int_C |z|^{2N} |m_e(z) - f_1(z)|^2 |dz| < \infty, \quad \int_C |z|^{2N+1} |m_o(z) - 1 - f_2(z)|^2 |dz| < \infty$$

を満たすので, $\tilde{m}_e = m_e - f_1$, $\tilde{m}_o = m_o - 1 - f_2$ とする. $g \in \Gamma_n$ に対して

$$|g|_C = \max_{z \in C} |g(\pm\sqrt{z})|$$

とおく. ここで積分核 $N_{g,m}(z, \lambda)$ の次の評価を得る.

補題 11 ある定数 c_1 が存在して全ての $z, \lambda \in C$ に対して

$$|N_{g,m}(z, \lambda)| \leq c_1 |g|_C |\hat{g}|_{C'} \left(\min_{\lambda' \in C'} |m_o(\lambda')| \right)^{-1} \left(|\tilde{m}_e(\lambda)| + |\lambda|^{1/2} |\tilde{m}_o(\lambda)| \right) (|z| |\lambda|)^{(n-2)/4} \quad (65)$$

が成り立つ. 一方, $N > (n-2)/4$ とすると

$$\min_{\lambda' \in C'} |m_o(\lambda')| > 0$$

である.

証明. (64) より

$$|N_{g,m}(z, \lambda)| \leq c_3 |g|_C |\hat{g}|_{C'} \left(\min_{\lambda' \in C'} |m_o(\lambda')| \right)^{-1} \int_{C'} \frac{|\tilde{m}_e(\lambda)| + |\lambda|^{1/2} |\tilde{m}_o(\lambda)|}{|\lambda' - z| |\lambda - \lambda'|} d\lambda'$$

であるが, $z \in C$ なら

$$\int_{C'} |\lambda' - z|^{-2} |d\lambda'| \leq c_4 |\operatorname{Im} z|^{-1} \leq c_5 |z|^{n/2-1}$$

となるので (65) を得る. $\min_{\lambda' \in C'} |m_o(\lambda')| > 0$ となることについては, $\Phi_n^{N+1/2}$ の元をその norm により C' 上で各点評価する必要があるが, これは $\Phi_n^{N+1/2}$ の元の Cauchy 積分表示で可能である. これによると, $\lambda' \in C'$ で $\lambda' \rightarrow \infty$ のとき $m_o(\lambda') \rightarrow 1$ となることがわかるので, $m_o(\lambda') \neq 0$ と合わせると結論が導ける. ■

積分核 $N_{g,m}(z, \lambda)$ は変数 z については減少は期待できないので, 行列式を定義するためにはこの積分核を少し変形する必要がある. 一般に行列式に対しては逆を持つ任意の作用素 H

$$\det(I + A) = \det(I + H^{-1}AH)$$

が成り立つので, 適当な $M > 0$ に対して

$$H(z) = z^M$$

とし, $N_{g,m}(z, \lambda)$ の代わりに積分核

$$\tilde{N}_{g,m}(z, \lambda) = H(z)^{-1} N_{g,m}(z, \lambda) H(\lambda)$$

を使う. さらに行列式 $\det$ の代わりに $\det_2$, すなわち

$$\det_2(I + A) = e^{-\operatorname{tr} A} \det(I + A) \quad (66)$$

を使うと, $\det_2$ は A が Hilbert-Schmidt 作用素でも有効であるので, 条件の検証が容易である. 新しい作用素 $\tilde{N}_m(g)$ が Hilbert-Schmidt 作用素であるための条件は

$$\int_{C^2} \left| \tilde{N}_{g,m}(z, \lambda) \right|^2 |dz| |d\lambda| < \infty \quad (67)$$

である。さらに $\text{tr} A$ に相当する部分を

$$\int_C \tilde{N}_{g,m}(z, z) dz = \int_C N_{g,m}(z, z) dz$$

に置き換えるので

$$\int_C |N_{g,m}(z, z)| dz < \infty \quad (68)$$

が必要である。(67) と (68) が満たされるとき、 τ -関数を

$$\tau_m(g) = \exp \left(\int_C N_{g,m}(z, z) dz \right) \det_2 \left(I + \tilde{N}_m(g) \right) \quad (69)$$

で定める。(67) の十分条件は、評価 (65) より

$$N > \frac{n-1}{2} \quad (70)$$

であり、 M は $n/4 < M \leq N - (n-2)/4$ の範囲で自由にとればよい。つまり N は (70) を満たすように最初にとっておく必要がある。このとき (68) は $N > (n-1)/2$ ならば満たされる。残っていることは、 $m \in \mathcal{M}_r^{\text{refl}}$ のときに定理 4 で定めた τ -関数と (69) で定義した τ -関数の一致の問題である。この一致性は当然成り立つように思えるが厳密には示さなければならない。ここでは概略だけ説明する。簡単のために (69) 式は通常の $\det$ とする。 $\tilde{N}_m(g)$ を定義する積分路 C を、 m_e, m_o の特異性がある部分 C_1 (これは $m \in \mathcal{M}_r^{\text{refl}}$ であるので $[-r^2, r^2]$ に含まれる有界) と残りの $-\infty$ まで伸びた部分 C_2 に分割し、作用素 $\tilde{N}_m(g)$ を C_1 に制限した作用素を N_1 、 C_2 に制限した作用素を N_2 とすると、 m_e, m_o は C_2 の内部で正則なので

$$N_2 N_1 = N_2^2 = 0$$

が示せる。このとき

$$\det \left(I + \tilde{N}_m(g) \right) = \det (I + N_1 + N_2) = \det (I + N_1)$$

となり、定理 4 で定めた τ -関数と (69) で定義した τ -関数は一致する。 C の内部で正則な関数 f_1, f_2 を m_e, m_o から引いても $\det$ が不変であることも同様の考えで示すことが出来る。結局、次の結論を得る。

補題 12 $N > (n-1)/2$ ならば τ -関数は (69) で定義可能であり、それは $\mathcal{M}_r^{\text{refl}}$ 上では元の τ -関数と一致する。この拡張された τ -関数は $\mathcal{M}_n^N$ 上で距離 (63) に関して連続である。

連続性を示すとき、 $\min_{\lambda' \in C'} |m_o(\lambda')|$ の m に関する連続性が問題である。このためには $\Phi_n^{N+1/2}$ の元を norm により C' 上で各点評価する必要があるが、これは $\Phi_n^{N+1/2}$ の元の Cauchy 積分表示で可能である。

5.3 $m \in \mathcal{M}_n^N$ の $\mathcal{M}_r^{\text{refl}}$ の元による近似

この節の結果が一番問題であり、主定理の前提条件を非常に強いものになっている。近似なしで主定理を示す方法を考えるか、別の効率的な近似を見出すかする必要があると思っている。

近似の証明は以下の段階で行う。

1. $m \in \mathcal{M}_n^N$ の $\mathcal{M}_r^{\text{refl}}$ の元への射影

Herglotz 関数 $m_{\pm}$ に対して (61) により、 m を定義する。 $a < b$ に対して下図のように単純閉曲線 $C^{a,b}$ を定める。

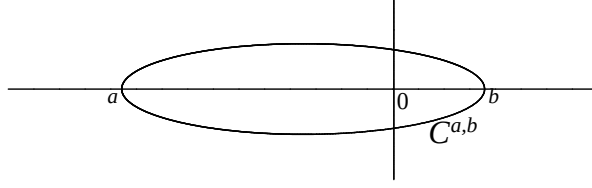


図 4

この曲線上で

$$\begin{cases} m_e^{a,b}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{a,b}} \frac{m_e(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda \\ m_o^{a,b}(z) = 1 + \frac{\sqrt{1 - a/z}}{2\pi i} \int_{C^{a,b}} \frac{m_o(\lambda) - 1}{(z - \lambda) \sqrt{1 - a/\lambda}} d\lambda \end{cases}$$

とし

$$\begin{cases} m_+^{a,b}(z) = -m_e^{a,b}(-z) - \sqrt{-z} m_o^{a,b}(-z) \\ m_-^{a,b}(z) = m_e^{a,b}(-z) - \sqrt{-z} m_o^{a,b}(-z) \end{cases}$$

と定める．このとき， $m_{\pm}^{a,b}(z)$ は再び Herglotz 関数になる．

2. 曲線 C_a^1 と線分 C_a^2 を下図のように定め，閉曲線 C_a を $C_a = C_a^1 + C_a^2$ とする． C_a^1 は十分先のほうでは $C = C_{\omega}$ と一致するとする．

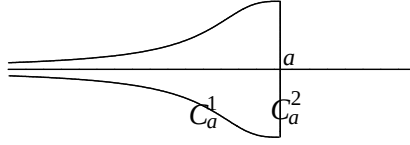


図 5

このとき

$$\begin{cases} m_e(z) - m_{a,e}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{m_e(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda \\ m_o(z) - m_{a,o}(z) = \frac{\sqrt{1 - a/z}}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{m_o(\lambda) - 1}{(z - \lambda) \sqrt{1 - a/\lambda}} d\lambda \end{cases}$$

となる．右辺の積分が $a \rightarrow -\infty$ のとき，ある N' に対して $\mathcal{M}_n^{N'}$ の距離で 0 に収束することを示す必要がある． $m_o(z) - m_{a,o}(z)$ の方が複雑であるので，これを主に議論を進める．整数 M と $b_1 > b$ に対して

$$\frac{\sqrt{1 - a/z}}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{m_o(\lambda) - 1}{(z - \lambda) \sqrt{1 - a/\lambda}} d\lambda \quad (71)$$

$$= f_a(z) + (z - b_1)^{-M} (\delta_a^1(z) + \delta_a^2(z)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{m_o(\lambda) - 1 - f(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda \quad (72)$$

と分割する．ただし $f_a(z)$ は C 内部 (D_{ω}^+) に極をもたない有理関数で， $\delta_a^1(z), \delta_a^2(z)$ は

$$\delta_a^j(z) = \int_a^0 \frac{(\lambda - b_1)^M \sqrt{a/\lambda - 1}}{\lambda - z} \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a^j} \frac{m_o(\lambda') - 1 - f(\lambda')}{(\lambda - \lambda') \sqrt{1 - a/\lambda'}} d\lambda'$$

である. f は $m_o - 1 - f \in L^2(C)$ となる $f \in H(D_\omega^+)$ とした. このとき

$$\int_C |\delta_a^1(z)|^2 |dz| = O\left(|a|^{2(2\alpha+1)q-2(N-M)+1} \log\left(1 + 2^\alpha |a|^{\alpha+1}\right)\right)$$

と評価できるので, $M \leq N - 1$ なら $a \rightarrow -\infty$ のとき右辺は 0 に収束する. 問題は $\delta_a^2(z)$ の収束は, $m_o - 1 - f$ の C 上での減少には無関係で, 線分 C_a^2 の長さが $a \rightarrow -\infty$ で減少することを利用することしかできない. その減少の order は $|a|^{-n/2+1}$ であるので, 複雑な評価ののち $M < n/4 - 1$ なら

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_C |\delta_a^2(z)|^2 |dz| = 0$$

が示せる. (72) の第 3 項の評価はより容易である.

補題 13 $m \in \mathcal{M}_n^N$ とすると, $N' < (n/4 - 1) \wedge N$ となる整数 N' に対して, 半無限区間で無反射になる列 $\{m_n\}$ が存在し, $\mathcal{M}_n^{N'}$ の距離で $m_n \rightarrow m$ となる.

この補題は奇数 $n \geq 9$ のとき有効になる.

5.4 作用 $g \cdot m$ の拡張

$\Gamma(r)$ の $\mathcal{M}_r^{refl}$ の作用 $g \cdot m$ は (50) で $g \cdot m = m_{gW_m}$ と定めた. 拡張された $\mathcal{M}_n^N$ に対してもこの作用を拡張したい. そのために $g \cdot m$ の τ -関数による表現

$$(g \cdot m)(z) = z + \int_\infty^z \left(\frac{\tau_m(gq_\zeta^2) \tau_m(g)}{\tau_m(gq_\zeta)^2} - 1 \right) d\zeta \quad (73)$$

を使う. この式は (35) と τ_m の cocycle property より出る. 問題は $\tau_m(gq_\zeta)$ および $\tau_m(gq_\zeta^2)$ の ζ が大きいときの評価に帰着される.

補題 14 $N > (n+1)/2$ に対して $g \in \Gamma_n$, $m \in \mathcal{M}_n^N$ とする. このとき $\tau_m(gq_\zeta)$ と $\tau_m(gq_\zeta^2)$ は $\mathbb{C} \setminus ([-\sqrt{-\lambda_0}, \sqrt{-\lambda_0}] \times i\mathbb{R})$ で正則であり, 次の評価をもつ.

$$\begin{cases} \tau_m(gq_\zeta) = F_1(\zeta^{-1}) + \delta_1(\zeta) \\ \tau_m(gq_\zeta^2) = F_2(\zeta^{-1}) + \delta_2(\zeta) \end{cases} \quad (74)$$

ここで, F_1, F_2 はと整関数であり, δ_1, δ_2 はある定数 c_1 に対して

$$\begin{cases} |\delta_1(\zeta)| \leq c_1 |\zeta^2|^{-L} \rho(\zeta^2)^{-1} \\ |\delta_2(\zeta)| \leq c_1 |\zeta^2|^{-L} \rho(\zeta^2)^{-2} \end{cases} \quad (75)$$

を満たす. ここで $L = N - (n+3)/2$ であり

$$\rho(\zeta) = \inf_{\lambda \in C} |1 - \lambda \zeta^{-1}|.$$

さらに, $F_1(0) = F_2(0) = \tau_m(g)$, $F_2'(0) = 2F_1'(0)$ となる.

したがって (73) の右辺は $\tau_m(g) > 0$ かつ $N \geq (n+5)/2$ なら収束する. $\mathcal{M}_n^N$ は基礎になる曲線 C に依存するので, それを表現するときには $\mathcal{M}_n^N(C)$ と表す.

補題 15 $n \geq 25$, $N > n + 3$ とする. $g, g_1, g_2 \in \Gamma_n$ と $m \in \mathcal{M}_n^N(C)$ に対して以下が成立する.

(i) $\tau_m(g) > 0$ とすると, $g \cdot m$ は (73) で定義でき, $g \cdot m \in \mathcal{M}_n^{N-n-3}(C')$ となる. 対応

$$\mathcal{M}_n^N(C) \ni m \rightarrow g \cdot m \in \mathcal{M}_n^{N-n-3}(C')$$

は連続になる.

(ii) $\tau_m(g_1) > 0$ とすると, 等式

$$\tau_m(g_1 g_2) = \tau_m(g_1) \tau_{g_1 \cdot m}(g_2) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} h'_2(\zeta) \left(\log \frac{\tau_m(g_1 q_\zeta)}{\tau_m(g_1)} - f(\zeta) \right) d\zeta \right) \quad (76)$$

が (40) の拡張として成立する. ここで $f \in H(D_+)$ は $\zeta^{n-1} (\log(\tau_m(g_1 q_\zeta)/\tau_m(g_1)) - f(\zeta)) \in L^1(C_1)$ となるように選び, C_1 は $\sqrt{C'}$ の外側にとり, C_1 上で $\tau_m(g_1 q_\zeta) \neq 0$ となるようにする.

5.5 τ -関数の非退化性

τ -関数の非退化性を示すための準備ができたので, $\mathcal{M}_r^{refl}$ の場合の方法を踏襲して非退化性を導く. 正確な議論は [SK2] を参照していただきたい.

$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ の場合には $g \in \Gamma_n$ を近似する有理関数列として $g_k(z) = (1 - h(z)/k)^{-k}$ を利用したが, これを $m \in \mathcal{M}_n^N$ の場合に採用すると, 多項式 $\hat{g}_k(z) = (1 - h(z)/k)^k$ の次数が限りなく大きくなり, あらゆる評価が破綻するので, ここでは異なる次の近似列を使用する.

$$g_k(z) = \left(\frac{1 - \frac{h(z)}{2k}}{1 + \frac{h(z)}{2k}} \right)^k.$$

この場合, $|\operatorname{Re} z| \leq a$, $k > a$ ならば

$$\left| \left(\frac{1 - \frac{z}{2k}}{1 + \frac{z}{2k}} \right)^k \right| \leq e^{2a} \quad (77)$$

が成り立つので, 収束 $g_k(z) \rightarrow \hat{g}(z)$, $\hat{g}_k(z) \rightarrow g(z)$ は D_ω^+ の近傍で有界性を保ちながらの各点収束となる. このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|N_m(gg_k) - N_m(1)\|_{HS} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_C |N_{gg_k, m}(z, z) - N_{1, m}(z, z)| |dz|$$

が示せる. したがって $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_m(gg_k) = 1$ がわかる. したがって十分大きく k をとると $\tau_m(gg_k) \neq 0$ となる. この k に対して $g_1 = gg_k$, $g_2 = g_k^{-1}$ として (76) を適用すると $\tau_m(g) > 0$ が示せる.

補題 16 $n \geq 25$, $N > n + 3$ とする. $g = e^h \in \Gamma_n$, $m \in \mathcal{M}_n^N$ に対して $\tau_m(g) > 0$ となる.

5.6 $\tau_m(g_t)$ の微分可能性

$\tau_m(g_t)$ のパラメータに関する微分可能性は補題 115 と類似の方法で示せる.

補題 17 $g = e^h \in \Gamma_n$, $m \in \mathcal{M}_n^N$ に対して, N が十分大きければ $\tau_m(g_t)$ は微分可能である.

以上による定理 1 を示すことができる.

6 Ergodic potential を初期値にする場合 (定理 2 の証明)

$q \in \mathcal{Q}_n$ となるためには対応する $m_{\pm}$ に対して漸近展開 (11) が D_{ω}^{-} で成立することを示す必要がある. これを ergodic 性を満たす定常な確率過程で確かめよう. 証明の要は 38 年前に著者が示した基本等式にある. 証明は次の順序で行う.

■漸近展開 (11) の対称化 $m_{\pm}$ に関する漸近展開 (11) を

$$m_1(z) = -\frac{1}{m_+(z) + m_-(z)}, \quad m_2(z) = \frac{m_+(z)m_-(z)}{m_+(z) + m_-(z)}$$

に関する漸近展開に置き換える. m_1, m_2 はいずれも Herglotz 関数になる. この関数により条件 (11) は

$$\begin{cases} m_1(-z) = \frac{1}{2}k^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^N b_j k^{-j}\right) + O(z^{-(N+1)/2}) \\ m_2(-z) = -\frac{1}{2}k \left(1 + \sum_{j=1}^N c_j k^{-j}\right) + O(z^{-(N+1)/2}) \end{cases} \quad (k = \sqrt{-z}) \quad (78)$$

と同値になる. さらに

$$\xi_j(x) = \frac{1}{\pi} \arg m_j(x + i0), \quad j = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

とおくと, $\operatorname{Im} z > 0$ の z に対しては $\operatorname{Im} m_j(z) > 0$ なので (Herglotz 関数), $0 \leq \xi_j(x) \leq 1$ である. また m が Herglotz 関数のとき, $0 < \operatorname{Im} \log m = \arg m < \pi$ となるので $\log m$ も Herglotz 関数になる. したがって

$$\begin{cases} m_1(z) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} \exp \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\xi_1(x) - I_{x>0}/2}{x - z} dx \right) \\ m_2(z) = -\frac{\sqrt{-z}}{2} \exp \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\xi_2(x) - I_{x>0}/2}{x - z} dx \right) \end{cases} \quad (79)$$

となることがわかる. したがって (78) のためには

$$\int_0^{\infty} x^N \left| \xi_j(x) - \frac{1}{2} \right| dx < \infty, \quad j = 1, 2 \quad (80)$$

がすべての $N \geq 1$ で成り立てば十分である. なぜならこのとき

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\xi_j(x) - I_{x>0}/2}{x - z} dx = -\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n-1} \int_{\lambda_0}^{\infty} x^n (\xi_j(x) - I_{x>0}/2) dx + z^{-N} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{x^N (\xi_j(x) - I_{x>0}/2)}{x - z} dx$$

と展開できるからである.

■一般化された反射係数 $R(z)$ ここで一般化された反射係数 $R(z)$ を

$$R(z) = \frac{m_+(z) + \overline{m_-(z)}}{m_+(z) + m_-(z)} \quad (81)$$

で定義しよう. 常に $|R(z)| \leq 1$ が成り立つ. potential q が急減少する場合の反射係数と絶対値は等しい. 次の補題は $\xi_j(x)$ と $R(z)$ の関係を示している.

補題 18 $m_{\pm} \in \mathbb{C}_+$ に対して

$$\begin{cases} \xi_j = \frac{1}{\pi} \arg m_j \quad (j = 1, 2) \\ R = \frac{\overline{m_+} + \overline{m_-}}{m_+ + m_-} \end{cases}$$

とすると、不等式

$$\left| \xi_1 - \frac{1}{2} \right|, \left| \xi_2 - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{2}{\pi} |R| \quad (82)$$

が成り立つ.

したがって条件 (11) を示すには結局

$$\int_0^\infty x^N |R(x)| dx < \infty \quad (83)$$

が成り立てばよいことになった. 条件 (83) を示すには $R(z)$ の実軸上での評価が必要になる. これは u が Schwartz クラスの関数なら可能である. また ergodic な potential の場合でも対応する Schrödinger 作用素の絶対連続スペクトル Σ_{ac} 上では $R(x) = 0$ がわかっているのて、条件 (83) は

$$\int_{[0, \infty) \setminus \Sigma_{ac}} x^N dx < \infty \quad (84)$$

ならば成立する. つまり絶対連続スペクトルが十分大きければよいわけである.

■ **Conformal map による条件の変形** (84) はまだかなりきつい条件であるのでもう少し緩めることを考えよう. そのためにこれを $R(z)$ の C 上での評価に置き換えたい. そこで $\phi(z)$ を領域 $\mathbb{C} \setminus [-b, \infty)$ から領域 $-D_\omega$ への conformal map とする. ここで $\mathbb{C} \setminus [-b, \infty)$ の境界 $[-b, \infty)$ は曲線 $-C = -C_\omega$ と対応しているとする. そしてこの節でのこれまでのすべての議論を $m_\pm(\phi(z))$ に対して行う. このとき $R(\phi(x))$ の (83) の評価は $m_\pm(\phi(z))$ の $-C$ 上での (11) 型の評価になるが, 曲線 $-C$ と $\phi(-C)$ は ∞ での漸近的ふるまいは同じなので, 結局元の $m_\pm(z)$ に対して (11) が示せたことになる.

そこで $R(\phi(x))$ の評価を ergodic ポテンシャルについて与えよう. そのために ergodic な Schrödinger 作用素の基本的な量を説明しておく ([SK3] 参照). $q_\omega(x)$ を定常で ergodic な確率過程とする (この ω は sample を表す ω). このとき Wel 関数 $m_\pm(z, \omega)$ も ω に依存する. そこで

$$w(z) = \mathbb{E} m_\pm(z, \omega)$$

とおく. この2つの期待値は一致することが知られている. w を **Floquet 指数** と呼ぶ. w も Herglotz 関数である.

$$\gamma(z) = -\operatorname{Re} w(z)$$

とおき, これを **Lyapunov 指数** と呼ぶ. これは常に $\gamma(z) \geq 0$ である. w はすべての $z \in \mathbb{R}$ で有限の極限値を持つことも知られており, w, γ はすべての $z \in \mathbb{C}$ で定義されている. 但し $w(z) = \overline{w(\bar{z})}$ なので w は上半平面からの極限値と下半平面からの極限値は一般には異なる. γ は同じ極限値をもつ. 次の等式は基本的である.

$$\begin{cases} w'(z) = -\mathbb{E} (m_+(z, \omega) + m_-(z, \omega))^{-1} \\ \frac{2\gamma(z)}{\operatorname{Im} z} = \mathbb{E} (\operatorname{Im} m_\pm(z, \omega))^{-1} \end{cases} \quad (85)$$

この2つの等式より次の等式が出る.

$$\frac{\gamma(z)}{\operatorname{Im} z} - \operatorname{Im} w'(z) = \frac{1}{4} \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{\operatorname{Im} m_+(z, \omega)} + \frac{1}{\operatorname{Im} m_-(z, \omega)} \right) |R(z, \omega)|^2 \right\} \quad (86)$$

そこで

$$\chi(z) = \frac{\gamma(z)}{\operatorname{Im} z} - \operatorname{Im} w'(z)$$

とすると, $\chi(z) \geq 0$ であるが, Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|R(z, \omega)|) &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\operatorname{Im} m_+(z, \omega)} + \frac{1}{\operatorname{Im} m_-(z, \omega)}\right) |R(z, \omega)|^2\right)} \\ &\quad \times \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\operatorname{Im} m_+(z, \omega)} + \frac{1}{\operatorname{Im} m_-(z, \omega)}\right)^{-1}\right)} \\ &\leq \sqrt{4\chi(z)} \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{\operatorname{Im} m_+(z, \omega) + \operatorname{Im} m_-(z, \omega)}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2\chi(z) \operatorname{Im} w(z)} \end{aligned}$$

を得る. つまり

$$\mathbb{E}(|R(z, \omega)|) \leq \sqrt{2\chi(z) \operatorname{Im} w(z)} \quad (87)$$

を得る. したがって例えば

$$\int_C |z|^N \sqrt{\chi(z) \operatorname{Im} w(z)} |dz| < \infty \quad (88)$$

がわかれば

$$\mathbb{E}\left(\int_C |z|^N |R(z, \omega)| |dz|\right) < \infty$$

となり, a.e. ω に対して

$$\int_0^\infty x^N |R(\phi(x), \omega)| dx < \infty$$

がわかることになる. そこで条件 (88) を他の確かめやすい条件に置き換えることを考えると

$$\int_0^\infty x^N \gamma(x) dx < \infty, \quad \forall N \geq 1$$

であれば十分であることがわかる. 結局, 定理 2 を得る.

KdV-flow は可換であり, その中には shift 操作も含んでいるので, 任意の $g \in \Gamma_n$ に対して $K(g)q_\omega$ は再び ergodic な定常過程になる. このとき Floquet 指数は不変であることがわかる. しかし ergodic な初期値に対して KdV-flow を施した場合未解決の問題がいくつかあるので次章で説明する.

7 White noise を初期値に持つ場合の未解決問題：ソリトン乱流問題

■概周期的な初期値 概周期的なポテンシャルは ergodic な場合の特別な例であるので, 定理??が適用でき KdV 方程式は解ける. 問題は解が再び概周期的になるかという問題である. これは最近スペクトルが絶対連続で, スペクトル集合 Σ がある種の等質性, つまり

$$\exists \delta > 0 \text{ に対して } |\Sigma \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)| \geq \delta \epsilon \quad \forall x \in \Sigma, \quad \forall \epsilon > 0$$

を持つときには解も概周期的であることが示されている ([EVY]). しかもこの場合には時間についても概周期的であることが示されている. したがってこの場合には soliton 現象とは異なる現象領域である. 少なくとも空間についての概周期性が一般の概周期ポテンシャルを初期値にもつ KdV 方程式の解について示せるかというのが次の未解決問題である. このためには $K(g)u(x)$ の x について $\mathbb{R}$ での一様 norm での評価が必要になるが, 容易ではない.

■soliton gas の統計的性質 ergodic なポテンシャルを初期値に持つ KdV-flow を考える．この場合歴史的背景のところで述べたように soliton gas の統計的な性質を導出することが問題であった．どのような問題かという、有限の n -soliton の場合には各 soliton の速さが求まっている．ergodic なポテンシャルにおいてはランダム性が強くなると対応する Schrödinger 作用素のスペクトルは dense な固有値になることが知られている．したがってこれを初期値にして KdV 方程式を解くと無限個の soliton が密集して動いていると思われるが、たとえばその平均的な速度はどのようになるかという問題である．物理的な考察により一応方程式は求められているようであるが、厳密な導出が望まれる．

■初期値が white noise の場合 ポテンシャルが極端にランダムな場合として white noise ポテンシャルがある． $q_\omega(x)$ を加法過程でその特性関数 ($\mathbb{E}e^{i\xi q_\omega(x)} = e^{x\psi(\xi)}$) が以下の $\psi(\xi)$

$$\psi(\xi) = -\sigma\xi^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x I_{|x|<1}) n(dx)$$

で与えられているとする．このとき white noise $dq_\omega(x)$ をポテンシャルとする Schrödinger 作用素の Weyl 関数 $m_\pm$ について

$$f(\zeta, z) = \mathbb{E} \left(e^{\zeta m_-(z, \omega)} \right)$$

は方程式

$$\begin{cases} f''(\zeta) + \left(\frac{\psi(i\zeta)}{\zeta} + z \right) f(\zeta) = 0 \\ f(0) = 1, \quad f(i\xi) \rightarrow 0 \text{ as } \xi \rightarrow \infty \text{ along } \mathbf{R}_+ \end{cases}$$

の解であることが予想される．実際 Lévy 測度 n が $[0, \infty)$ に台をもち

$$\int_0^\infty xn(dx) < \infty$$

を満たすときには確かめることが出来る．したがって Floquet 指数は

$$w(z) = f'(0, z)$$

と求まることになる．単純な Gaussian white noise の場合には、方程式は

$$f''(\zeta) + (\sigma\zeta + z) f(\zeta) = 0$$

となり、 f は Airy 関数を使って表すことが出来る．この場合 Schrödinger 作用素のスペクトルは $\mathbb{R}$ 全体になる．もちろん Gaussian white noise を初期値にして KdV 方程式を解く問題に定理??は適用できない．しかし歴史的背景で述べたように Gaussian white noise に周期性を仮定すれば KdV 方程式は解けることがわかっている．周期性を仮定せずに KdV 方程式を解くことは未解決の問題である．Gaussian white noise は形式的には

$$\exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2 dx \right)$$

を「密度」にもつので、 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2 dx$ が KdV 方程式の不変測度になる．周期的な Gaussian white noise の場合にはすでに理論的な研究がある．解の構成を我々の方法で考える場合には、今までの付帯条件：

$$\text{Schrödinger 作用素のスペクトル} \subset [\lambda_0, \infty)$$

を外す必要がある．このためにはスペクトル測度 σ に対して $-\infty$ で強い収束条件

$$\int_{-\infty}^0 e^{c(-x)^{3/2}} \sigma(dx) < \infty \quad \forall c > 0 \quad (89)$$

を課さなければならない．Gaussian white noise の場合には σ の平均は計算されており，それによると，ある $c > 0$ までは (89) は満たされることがわかる．したがって我々の方法で Gaussian white noise を初期値に持つ KdV 方程式の解を構成できる可能性は残っている．

最近，我々とは別の方法で white noise を初期値とする KdV 方程式の解が構成できることの証明が発表された [KMV]．その証明では white noise が KdV に関して不変測度になることが重要な要素になっている．

参考文献

- [CKSTT] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao: Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on R and T , Journal of the AMS, 16 (2003), 705-749
- [EVY] B. Eichinger, T. VandenBoom, P. Yuditskii: KdV hierarchy via Abelian coverings and operator identities, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 6 (2019), 1-44
- [GGKM] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura: Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Physical Review Letters, 19 (19), (1967): 1095-1097
- [GT] K. Grunert, G. Teschl: Long-time Asymptotics for the Korteweg-de Vries Equation via Nonlinear Steepest Descent, Math. Phys. Anal. Geom. 12, 287-324 (2009)
- [H] Ryogo Hirota: Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons, Phys. Rev. Lett. 27, (1971), 1192 -
- [KMV] R. Killip, J. Murphy, M. Visan: Invariance of white noise for KdV on the line, Arxiv 1904.11910v1[math.AP]
- [KT] T. Kappeler, P. Topalov: Global wellposedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$: Duke Math. Journal 135(2006), 327-360.
- [L] P. Lax: Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Applied Math., 21 (5), (1968): 467-490
- [M] V. A. Marchenko: Nonlinear Equations and Operator Algebra, Mathematics and its Applications (Soviet Series), (1987) D. Reidel Publishing Company.
- [MGK] R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal: Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, J. Math. Phys., 9 (8), (1968): 1204-1209
- [S] M. Sato: Soliton Equations as Dynamical Systems on an Infinite Dimensional Grassmann Manifolds, Suriken Koukyuroku 439 (1981), 30 - 46. (<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/en/public-01.html>)
- [SA] H. Segur and M. J. Ablowitz, Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painlevé transcendent, Phys. D 3, (1981), 165-184
- [SK1] S. Kotani: Construction of KdV Flow I. Tau-Function via Weyl Function, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, vol. 14(2018) issue 3, 297-335
- [SK2] S. Kotani: Ergodic Schrödinger operators and its related topics, Lecture note in Nanjing Univ. 2019, <http://www.eonet.ne.jp/~kotani/index-english.htm>

- [SK3] S. Kotani: One-Dimensional Random Schrödinger Operators and Herglotz Functions, Taniguchi Symp. PMMP Katata 1985, 219-250
- [SW] G. Segal, G. Wilson: Loop groups and equations of KdV type, Publ. IHES, 61 (1985), 5 - 65
- [T] Shunichi Tanaka: Korteweg-de Vries Equation; Asymptotic Behavior of Solutions, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10(1975), 367-379
- [ZK] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal: Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett., 15 (6),(1965): 240–243
- [Z] V. E. Zakharov: Kinetic equation for solitons, Sov. Phys. JETP 33:538–541 (1971).
- [Z1] V. E. Zakharov: Turbulence in Integrable Systems, Studies in Applied Mathematics 122:219–234,(2009).