Generalized eigenvalue problems of nonhomogeneous elliptic operators

東京理科大学理学部第一部数学科　田中　視英子

本講演では, 以下の方程式が正値解を持つようなパラメーター $\lambda \in \mathbb{R}$ の存在について報告する:

$$(EV;\lambda) \quad -\operatorname{div}\left(a(x,|\nabla u|)\nabla u\right) = \lambda |u|^{p-2}u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

ここで, $1 < p < \infty$, Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域で $\partial\Omega$ は C^2 級とする. 本講演では, 写像 $A(x,y) := a(x,|y|)y$ に対して, $(EV;\lambda)$ が非自明な解を持つとき, λ は generalized eigenvalue for the operator A on $W_0^{1,p}(\Omega)$ と呼ぶことにする.

方程式 $(EV;\lambda)$ に現れる $a(x,t)$ は $a(x,t) = |t|^{p-2}$ としたとき, 方程式の左辺には通常の p-Laplacian が現れるが, 本講演では $a(x,t)$ には t に関する $p-2$ homogeneity を仮定しない. このことに起因して一般の場合には p-Laplacian のときと異なり, $\inf\{\lambda \in \mathbb{R};\, \lambda$ is a generalized eigenvalue of A$\}$ がレイリー商により得られるかどうかわからないことに注意する. 本講演では, $A(x,y)$ が以下の意味で漸近的に $p-1$ homogeneity である場合:

$$\begin{aligned} a(x,|y|)y - a_0(x)|y|^{p-2}y &= o(|y|^{p-1}) \quad \text{as } |y| \to 0, \\ a(x,|y|)y - a_\infty(x)|y|^{p-2}y &= o(|y|^{p-1}) \quad \text{as } |y| \to \infty, \end{aligned}$$

(ここで a_0, a_∞ は正値連続関数とする) に Lagrange の未定乗数についての解析を行うことにより, 以下の結果が得られたことを紹介する：

定理 $\lambda_1(a_0) \neq \lambda_1(a_\infty)$ とする. このとき, $\lambda_1(a_0)$ と $\lambda_1(a_\infty)$ の間にある任意の λ に対して $(EV;\lambda)$ は正値解を持つ.

従って, λ は a generalized eigenvalue for the operator A on $W_0^{1,p}(\Omega)$ である. ここで, $\lambda_1(a_i)$ ($i = 0$ or ∞) は

$$\lambda_1(a_i) := \inf\left\{ \frac{\int_\Omega a_i(x)|\nabla u|^p\,dx}{\int_\Omega |u|^p\,dx} \,;\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$$

で定まる the weighted p-Laplasian with weight function a_i の第一固有値とする.

本講演内容は Dumitru Motreanu (Université de Perpignan) との共同研究である [1] によるものである.

[1] D. Motreanu and M. Tanaka, *Generalized eigenvalue problems of nonhomogeneous elliptic operators and their application*, to appear in Pacifc J. Math.