2024年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

2023年7月8日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい． さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \ldots, \boxed{\mathbf{9}}$ から２問選択し，計４問について解答しなさい．

以下では，$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合を表すこととする．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ に対して，次の２条件 (i), (ii) が満たされているとき，実数 c を求めよ．

(i) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は一次独立である．

(ii) ４つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2,\ 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3,\ 4\boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4,\ 2\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_1$$

は一次従属である．

(2) 実数 a に対して，３次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3+a & 4-a & -4+a \\ -4 & 8+a & -7-a \\ 1-a & 2+2a & -1-2a \end{pmatrix}$$

を考える．

(2-1) A が対角化可能となるような a をすべて求めよ．

(2-2) $a = -2$ のとき，A のジョルダン標準形を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問に答えよ.

(1) 関数

$$f(x, y) = -(x+y)^2 + 2x^2(x+y) + y^3$$

の極値および極値を与える $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ.

(2) 平面の領域

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x + y - (x-y)^2 \leq 1,\ 0 \leq x - y \leq 1\right\}$$

に関する重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$$

を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$　Rを単位元1を持つ可換環とし，その0でない元αを1つ固定する．$R^\times$をRの可逆元全体のつくる乗法群とし，

$$A = \left\{x \in R \mid 1 + \alpha x \in R^\times\right\}$$

とおく．また，$x, y \in R$に対して，

$$x \circ y = x + y + \alpha xy$$

と定める．

(1) $x, y \in A$ならば$x \circ y \in A$であることを示せ．

(2) 演算$\circ$について，Aはアーベル群であることを示せ．

(3) 写像$f \colon A \to R^\times$を，$x \in A$に対し

$$f(x) = 1 + \alpha x$$

とすることで定める．写像fが群の準同型写像であることを示せ．また，fが単射となるためのαの条件を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$　以下の問に答えよ．

(1) aを実数とする．平面$\mathbb{R}^2$において，曲線$y = x^3 - x$と直線$y = ax + a$の交点を求めよ．

(2) aを実数とする．多項式環$\mathbb{R}[x, y]$において，2つの元

$$y - (x^3 - x),\ y - (ax + a)$$

で生成されるイデアルをIとし，商環$\mathbb{R}[x, y]/I$をSとする．

(2-1) Sと直積環

$$\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}[t]/(t^2)\right)$$

が同型となるようなaをすべて求めよ．ただし，$\mathbb{R}[t]$は多項式環である．

(2-2) Sと直積環

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

が同型となるようなaの範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$　a, b を正の実数とする．i で虚数単位を表す．留数定理を用いて，広義積分

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibx}}{(x^2+a^2)^2}dx$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$　$y'=\dfrac{dy(x)}{dx}$ と表したとき，実数値関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式

$$(*)\quad y'+(2x-1)y-(x-1)y^2=x$$

を考える．

(1) A, m を実数とする．$y=Ax^m$ が微分方程式 $(*)$ の解となるような A, m をすべて求めよ．

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$　$\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度を $m(\cdot)$ で表し，$\mathbb{R}$ 上の非負可測関数 $f(x)$ を考える．

(1) N を 2 以上の自然数とするとき，

$$m\left(\{x \mid f(x)>N\}\right)\le\frac{1}{\log N}\int_{\mathbb{R}}|\log f(x)|m(dx)$$

を示せ．

(2) もし

$$\int_{\mathbb{R}}|\log f(x)|m(dx)<\infty$$

ならば，ルベーグ測度 $m(\cdot)$ に関して，ほとんどいたるところ $0<f(x)<\infty$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$　X, Y を位相空間，A を X の部分集合とし，次の 2 条件 (a), (b) が満たされているとする．

(a) A は X において稠密である．

(b) Y はハウスドルフ空間である．

$f\colon X\to Y$ と $g\colon X\to Y$ を連続写像とする．任意の $a\in A$ に対して $f(a)=g(a)$ が成り立つならば，$f=g$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 関数

$$F(x,y,z) = x^4 + z^2 - 4xy^3 + y^4 + 2y^2 - 9$$

によって，空間図形

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\right\}$$

を定める．また，S の点 $(-1,1,1)$ を P とする．

(1) S は滑らかな曲面（C^∞ 級曲面）であることを示せ．

(2) 点 P における曲面 S の接平面の方程式を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ 内の平面

$$\mathbb{R}^2_{xy} = \{(x,y,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

を考え，$\mathbb{R}^2_{xy} \cap S$ を γ とする．

(3-1) γ は，点 P の近傍で滑らかな曲線（C^∞ 級曲線）であることを示せ．

(3-2) 点 P における曲線 γ の曲率を求めよ．ただし，点 P の近傍において，曲線 γ が C^∞ 級関数 $x(t), y(t)$ によって $(x(t), y(t), 1)$ とパラメーター表示され，さらに，ある実数 a で $\mathrm{P} = (x(a), y(a), 1)$ と表されるとき，点 P における曲線 γ の曲率 κ は

$$\kappa = \frac{x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)}{\{(x'(a))^2 + (y'(a))^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

と表されることを用いてもよい．