

2023 年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
(春季募集)

入学試験問題
数 学

2023 年 2 月 20 日

次の問題のうち、**1**、**2**には必ず答えなさい。さらに、**3**, ..., **9** から 2 問選択し、計 4 問について解答しなさい。

以下では、 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合を表すこととする。

1 以下の (1), (2) 両方に答えよ。

(1) 行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ とする。自然数 n について、 A^n を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^{100}$ の線形変換 f を、100 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 98 & 99 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 & 101 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 98 & 99 & 100 & \cdots & 196 & 197 \\ 99 & 100 & 101 & \cdots & 197 & 198 \end{pmatrix}$$

を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める。 f の像と核をそれぞれ V, N とする。

(a) V の次元を求めよ。

(b) N の次元と一組の基底を求めよ。

2 以下の (1), (2) 両方に答えよ.

- (1) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、区間 $[a, b]$ で C^1 級で、かつ、 $f_n(a) = 0$ を満たすとする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| \frac{d}{dt} f_n(t) \right|^2 dt = 0$$

ならば、 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 $[a, b]$ 上で 0 に収束することを示せ.

- (2) $a \in \mathbb{R}$ に対して、無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^a$$

が収束するための必要十分条件を求めよ.

3 位数 360 の可換群で互いに同型でないものをすべて求めよ.

4 $\theta^2 + 13 = 0$ をみたす複素数 θ を一つ定め, 複素数体の部分環

$$R = \{ a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$$

と, そのイデアル $P = (7, 1 + \theta)$, $Q = (7, 1 - \theta)$ を考える. 以下の (1), (2), (3) に答えよ.

- (1) $P + Q = (1)$ および $PQ = (7)$ を示せ.
- (2) 写像 $f: R \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ を $f(a + b\theta) = \overline{a - b}$ によって定める (ただし, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $x \mapsto \bar{x}$ は自然な全射である). このとき, f は環の準同型写像であり, かつ $\text{Ker } f = P$ であることを示せ.
- (3) 剰余環 $R/(7)$ は, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ と環として同型であることを証明せよ.

5 定数 $a > 0$ に対して, 複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{\text{Log}(z)}{z^2 + a^2}$$

と定義する. ただし $\text{Log}(z)$ は, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ で定義される対数関数の主値で, $\text{Log}(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ ($r > 0$, $|\theta| < \pi$) であるとする. このとき以下の (1), (2), (3) に答えよ.

- (1) $\varepsilon > 0$ に対して, $C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < \pi\}$ とするとき, 以下を示せ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 0.$$

- (2) $R > 0$ に対して, $C_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < \pi\}$ とするとき, 以下を示せ.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

- (3) 複素積分を用いて, 以下の積分を求めよ.

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx.$$

6 $y' = \frac{dy(x)}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ と表したとき $y = y(x)$ ($x > 0$) に関する以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) 同次微分方程式 $2x^2y'' + xy' - y = 0$.

(2) 非同次微分方程式 $2x^2y'' + xy' - y = 3x - 5x^2$.

7 以下の (1), (2) 両方に答えよ.

(1) $f \in L^1(\mathbb{R})$, g を $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数とする. このとき、

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

はすべての $x \in \mathbb{R}$ で連続であることを、優収束定理を用いて示せ.

(2) 同様に、 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ と仮定するとき、

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

はすべての $x \in \mathbb{R}$ で連続であることを示せ.

8 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

に対して、 $\mathbb{R}^2$ から導かれる相対位相を入れる. この位相空間 U 上に、同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ such that } (y_1, y_2) = (2^m x_1, 2^m x_2)$$

により定義する. 商集合 $U/\sim$ に、 U から導かれる商位相を入れる. 以下の (1), (2) 両方に答えよ.

(1) 位相空間 $U/\sim$ は、コンパクトであることを示せ.

(2) 位相空間 $U/\sim$ は、ハウスドルフ空間であることを示せ.

9 2次元実射影空間 $\mathbb{R}P^2$ の点 $[p]$ に対して

$$R_{[p]} = \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{p_1 p_1}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} & -2\frac{p_1 p_2}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} & -2\frac{p_1 p_3}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \\ -2\frac{p_2 p_1}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} & 1 - 2\frac{p_2 p_2}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} & -2\frac{p_2 p_3}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \\ -2\frac{p_3 p_1}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} & -2\frac{p_3 p_2}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} & 1 - 2\frac{p_3 p_3}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij} - 2\frac{p_i p_j}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

と定める. ここで, $[p]$ は $\mathbf{p}$ を代表元とする $\mathbb{R}P^2$ の点を表し, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は, $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を表す. 3×3 実対称行列全体を $S(3)$ と表し、写像

$$F : \mathbb{R}P^2 \rightarrow S(3)$$

を $F([p]) = R_{[p]}$ によって定める. 以下の (1), (2), (3) に答えよ.

- (1) F は単射であることを示せ.
- (2) $S(3)$ の多様体としての次元を求めよ.
- (3) 点 $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$ に対して、 F の微分写像

$$DF_{[p]} : T_{[p]}\mathbb{R}P^2 \rightarrow T_{F([p])}S(3)$$

の階数を求めよ.