

2023 年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
(夏季募集)

入学試験問題
数 学

2022 年 7 月 9 日

次の問題のうち、**1**, **2** には必ず答えなさい。さらに、**3**, ..., **9** から 2 問選択し、計 4 問について解答しなさい。

以下では、 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数全体、有理数全体、実数全体、複素数全体の集合を表すこととする。

1 4×3 行列 A および 4×4 行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & -2 & -4 \\ -3 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ が定める線型写像を $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 、また $\mathbf{w} \mapsto B\mathbf{w}$ が定める線型写像を $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ とする。

- (1) $\text{Im} f$ の基底を一組求めよ。ただし、 $\text{Im} f$ は写像 f の像とする。
- (2) $\text{Im} f \cap \text{Ker} g$ の基底を一組求めよ。ただし、 $\text{Ker} g$ は写像 g の核とする。

2 以下の問い (1), (2) 両方に答えよ。

- (1) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cos x - (ax + b)}{x^3}$$

が存在するとき、 a, b の値とその極限值を求めよ。

- (2) $0 < r < R$ とするとき、次の積分を求めよ。

$$I = \iint_{x^2 + y^2 < r^2} \frac{dx dy}{R^4 - (x^2 + y^2)^2}$$

- 3** $f(z)$ は $z = 0$ を含む領域 Ω で定義された複素関数であり、 $z = 0$ を除いて Ω 上で正則であるとする．さらに、ある定数 $C > 0$ があって

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z| \log(1/|z|)} \quad (z \neq 0)$$

が成り立っているとする．このとき、 $z = 0$ は除去可能な特異点であることを示せ．

- 4** i を虚数単位として、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする．また、有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大体 K を、 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ と定める．

- (1) ω の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．
- (2) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ．
- (3) $K = \mathbb{Q}(\theta)$ となるような $\theta \in K$ を1つ求めよ．
- (4) 前問で求めた θ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

- 5** 実数 a に対して、剰余環 $S = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1, x + y - a)$ を考える．

- (1) $\mathbb{R}[x]$ のイデアル I で、 $\mathbb{R}[x]/I$ が S に同型となるものを求めよ．
- (2) S が整域になるための a の条件を求めよ．
- (3) S がべき零元を持つような a を求めよ．

- 6** 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上で定義された実数値関数 f は可積分であり、また $\mu(X) = 1$ とする．このとき

$$\exp\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right) = \int_X \exp(f(x)) d\mu(x)$$

であるためには、 f が X 上ほとんどいたるところ定数関数であることが、必要十分であることを示せ．

7 以下の問い (1), (2) 両方に答えよ.

- (1) $[0, 1]$ で定義された可積分関数 u に関する次の積分方程式の解を求めよ.

$$\int_0^1 (x+y)^2 u(y) dy = \frac{1}{3}u(x) + 1$$

- (2) 与えられた実数 $a > 0$ が十分に小さいとき、

$$u(x) = \frac{1}{3} \int_0^1 (x+y)^2 u(y) dy + au(x)^2 + \frac{1}{9}$$

の、 $[0, 1]$ 上で連続な解 u が存在することを証明せよ.

8 X を空でない集合、 $A \subset X$ を空でない真部分集合とする.

- (1) X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ を、

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid U \supset A\} \cup \{\emptyset\}$$

と定義すると、 $\mathcal{O}$ は X の位相であることを示せ.

- (2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間ではないことを示せ.

- (3) $a \in A$ とするとき、部分集合 $\{a\}$ の閉包を求めよ.

9 2×2 実数行列全体を $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ と表し、その部分集合を

$$N = \{X \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid \text{tr}(X^2) = 1, \text{tr} X = 1\}$$

とする.

- (1) N は C^∞ 級多様体であることを示せ.

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、写像 $\phi: \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ を

$$\phi(X) = AXA^{-1}$$

で定める. このとき、対応 $X \mapsto \phi(X)$ は、可微分写像 $\phi: N \rightarrow N$ を定めることを示せ.

- (3) 上で定めた可微分写像 $\phi: N \rightarrow N$ の固定点 ($\phi(X) = X$ を満たす点) をすべて求めよ.