2021 年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

2020 年 8 月 26 日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から２問選択し，計４問について解答しなさい．

以下では，$\mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ はそれぞれ整数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合を表すこととする．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の (1), (2) 両方に答えよ．

(1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．自然数 n について，A^n を求めよ．

(2) $n \times n$ 実行列 A に対して線形変換 $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R})$ によって定める．$A^2 = A$ が成り立つとき，ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ は f_A の像空間 $\mathrm{Im} f_A$ と核空間 $\mathrm{Ker} f_A$ の直和によって表わされることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の (1), (2) 両方に答えよ．

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ の値を求めよ．

(2) 任意の実数 x, y に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

をみたす関数 $f(x)$ は，定数関数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sを平面内の原点を重心とする正方形とする．平面の線形変換で，原点を中心とする回転でSをSに移すもの，および，原点を通る直線に関する線対称移動でSをSに移すもの全体は，写像の合成を演算として群をなす(この事実は認めてよい)．この群をD_4と表し，その位数をNとする．以下の問に答えよ．

(1) Nを求めよ．

(2) $1 < n < N$をみたす自然数nで，D_4の部分群の位数となるものをすべて挙げよ．また，それぞれのnについて，位数nのD_4の部分群を1つずつ与えよ．

(3) D_4の真部分群で1つの元で生成されないものがある．その例を1つ挙げよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 多項式環$\mathbf{Z}[x]$について，以下の問に答えよ．

(1) 剰余環$\mathbf{Z}[x]/(x^2+1, x^3+2x+1)$は$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$に同型であることを示せ．

(2) aを自然数とする．剰余環$\mathbf{Z}[x]/(x^2+1, x^3+2x+a)$が，ある2以上の相異なる整数$m, n$ $(m > n)$に対して，直積環$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$と同型となるとする．このような$a$のうち最小のものを求めよ．また，そのような$a$に対する$m, n$も求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $r > 0$に対して，$\Gamma_r = \left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq \pi \right\} \subset \mathbf{C}$とする．また，$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$とおく．以下の問に答えよ．

(1) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{r \to 0} \int_{\Gamma_r} f(z)\, dz$$

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $y' = \frac{dy(x)}{dx}$ と表し $y = y(x)$ に関する常微分方程式を考える．以下の問に答えよ．

(1) $y' - 4xy = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $y' - 4xy = -4x^3$ の一般解を求めよ．

(3) $y' + 2xy = 2x^3y^3$ の一般解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ μ を $\mathbf{R}$ 上の有限ボレル測度とする．このとき，

$$\varphi(y) = \int e^{ixy}\, d\mu(x) \quad (y \in \mathbf{R})$$

と定義する．以下の問に答えよ．

(1) φ は有界で一様連続な関数であることを証明せよ．

(2) さらに $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$ ならば，φ は C^1 級関数であることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbf{R}^3$ 上の C^∞ 関数 f_1, f_2 を

$$f_1(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(y^2+z^2), \qquad f_2(x,y,z) = 3xy - z^2$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 0 は関数 $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ の正則値であることを示し，$\mathbf{R}^3$ の部分集合 $f_1^{-1}(0)$ は多様体であることを示せ．

(2) 写像 $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を $(x,y,z) \mapsto (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$ によって定める．このとき $M = F^{-1}((0,0))$ は多様体であることを示せ

(3) (2) で定めた M 上の 1 点を $q = (1, 1, \sqrt{3})$ とする．q を含む M の座標近傍を (U, ϕ) とするとき，包含写像 $i : M \to \mathbf{R}^3$ との合成写像 $i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbf{R}^3$ を Φ と表す．座標近傍 (U, ϕ) を一つ定めて，微分写像 $(D\Phi)_{\phi(q)} : T_{\phi(q)}\phi(U) \to T_{i(q)}\mathbf{R}^3$ を表す行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (X, d) をコンパクト距離空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．また，すべての $x \in X$ について $f(x) \neq x$ であるとする．このとき，ある正数 ε が存在して任意の $x \in X$ に対して

$$d(f(x), x) \geq \varepsilon$$

が成り立つことを示せ．