平成31年度

学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

平成30年7月7日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から2問選択し，計4問について解答しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の行列 A, B に関する問に答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 15 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a+2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ と A が，少なくとも1つ共通の固有ベクトルをもつとき a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の (1), (2) 両方に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$ であることを示せ．

(2) 平面の領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x + \sqrt{x^2 + y^2}\}$ に関する重積分

$$S_D = \iint_D 1\, dxdy$$

の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ C_2 を位数 2 の巡回群，S_3 を 3 次対称群とする．直積群 $C_2 \times S_3$ の位数 6 の部分群をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\mathbf{F}_5 = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ を 5 元体とし，$a \in \mathbf{F}_5$ に対して，多項式

$$f(X) = X^3 + X^2 + aX + 1 \in \mathbf{F}_5[X]$$

を考える．

(1) $f(X)$ が $\mathbf{F}_5$ 上可約となる a をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた a の値のそれぞれに対して，剰余環 $\mathbf{F}_5[X]/(f(X))$ の零因子をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^8+1)^2} dx$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $p(t), q(t) \in C[0,\infty)$ は実数値で，$\sup_{t\in[0,\infty)} p(t) < 0,\ \int_0^\infty |q(t)|dt < \infty$ であるとする．このとき，常微分方程式

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \quad t \geq 0$$

の任意の解 $x(t)$ は $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$ を満たすことを示せ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f \in L^1(0,1)$, $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t) z^{[nt]}\, dt = 0$$

であることを示せ．ただし，$x \in \mathbf{R}$ に対して，$[x] = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\}$ と定める．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbf{R}^4$ 上の C^∞ 関数 f_1, f_2 を

$$f_1(x,y,z,w) = x^2+y^2+z^2+w^2, \qquad f_2(x,y,z,w) = xy+zw$$

とする．写像 $F:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ を $(x,y,z,w) \mapsto (f_1(x,y,z,w), f_2(x,y,z,w))$ によって定めるとき，以下の問に答えよ．

(1) $p = (1,-1,-1,1)$ を $\mathbf{R}^4$ の点とするとき，接空間 $T_p\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$X_p = 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p$$

の微分写像 $(DF)_p$ による像を求めよ．

(2) 点 $(1,0)$ が F の正則値であること示し，$M := F^{-1}(1,0)$ が多様体であることを示せ．

(3) (2) で定める M 上に点 $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ を定める．q を含む M の座標近傍を (U,ϕ) とするとき，包含写像 $i: M \to \mathbf{R}^4$ との合成写像 $i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbf{R}^4$ を Φ と表す．座標近傍 (U,ϕ) を 1 つ定めて，微分写像 $(D\Phi)_{\phi(q)}$ を表す行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ X, Y を位相空間とし，X が $X = A \cup B$ と表されているとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) A, B ともに開集合，あるいは，A, B ともに閉集合であるとき

$$\overline{A-B} \cap (B-A) = (A-B) \cap \overline{B-A} = \phi \qquad (*)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\overline{A-B}, \overline{B-A}$ はそれぞれ $A-B$, $B-A$ の閉包を表す．

(2) A, B について上の条件 $(*)$ が成り立つとする．このとき写像 $f: X \to Y$ について，$f|_A, f|_B$ がともに連続であるならば，f は X 上で連続であることを示せ．ただし，$f|_A, f|_B$ は写像 f の A, B への制限をそれぞれ表す．