平成30年度

学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

平成29年7月8日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から２問選択し，計４問について解答しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とし，3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ (a+2)^2 \\ a^2+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbf{R}^5$ の部分空間の**直交補空間**を W とする．

(1) W の次元が 3 となる a がただ一つある．それを定めよ．

(2) 前問 (1) で定めた a について，W の直交基底を一組求めよ（正規化しなくてもよい）．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の (1), (2) 両方に答えよ．

(1) 数列 $a_1, a_2, \ldots$ は $n \to \infty$ において a に収束する．この時,

$$\lim_{r \uparrow 1} (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} a_n = a$$

を示せ.

(2) 関数 f を次式で定義する：

$$f(x) = \int_0^1 u^x (1-u)^{-x} du \qquad (-1 < x < 1).$$

このとき，以下の (a), (b) 両方に答えよ．

(a) 関数 f の極値・対称性・漸近挙動・凸性などに注意しながらそのグラフの概形を描け.

(b) 極限値 $\lim_{x \downarrow -1} (x+1) f(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ A を整数を成分とする n 次正方行列とし，D をその行列式とする．以下の各命題を証明せよ．

(1) A の成分について，対角成分がすべて偶数で他の成分がすべて奇数ならば，$D \equiv n-1 \pmod 2$ が成り立つ．

(2) m を 2 以上の自然数とし，$A = (a_{ij})$ とする． すべての i, j に対して $a_{ij} \equiv j \pmod m$ ならば，$D \equiv 0 \pmod{m^{n-1}}$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\alpha^5 = 9\alpha + 6$ をみたす複素数 α に対して，以下の問に答えよ．

(1) 拡大次数 $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$ を求めよ．

(2) $\mathbf{Q}(\alpha^2) = \mathbf{Q}(\alpha)$ を示せ．

(3) α^2 の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a, b > 0$ とするとき，広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx$$

の値を留数計算を用いて求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $a > 1,\, b > 0$ とし，次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$y'(t) = a\, e^{y(t)} - 1, \quad y(0) = b.$$

(1) $y(t)$ を求めよ．

(2) $\lim_{t \uparrow T} y(t) = \infty$ となるような $T > 0$ を求めよ．

(3) $\lim_{t \uparrow T} y(t) / \log(T - t)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ は有界可測で

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

であるとき，次を示せ．但し $\sigma > 0$ とする．

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^1 t^{\sigma - 1} \left(\int_{xt}^{x} \frac{f(u)}{u} \, du \right) dt = 0.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 2×2 複素行列全体の部分集合

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} z & x + iy \\ -x + iy & z \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

を $\mathbf{R}^3$ と同一視する．このとき

$$U = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ -x + iy & z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} Z & X + iY \\ -X + iY & Z \end{pmatrix}$$

に対して

$$V = U^2$$

によって写像 $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を定める．また，$\mathbf{R}^3$ の単位球面を S^2 と表す．以下の問に答えよ．

(1) 写像 Φ は単位球面 S^2 に制限することによって可微分写像 $\varphi : S^2 \to S^2$ を定めることを示せ．

(2) 点 $p = (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$ における S^2 の接ベクトル $v = (1, 1, -\sqrt{6})$ の微分写像

$$(D\varphi)_p : T_p S^2 \to T_{\varphi(p)} S^2$$

による像を空間ベクトルの形で求めよ．また，微分 $(D\varphi)_q$ が同型とならない点 $q \in S^2$ をすべて求めよ．

(3) $\mathbf{R}^3$ の微分形式 $\omega = X dY \wedge dZ + Y dZ \wedge dX + Z dX \wedge dY$ を S^2 に制限して得られる S^2 上の微分形式を Ω とする．このとき，積分

$$\int_{S^2} \varphi^* \Omega$$

の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 自然数 n に対して，$\mathbf{R}^2$ および $\mathbf{R}^3$ の点を

$$x_n(\theta) = (n + n\cos\theta,\, n\sin\theta)$$
$$y_n(\theta) = \left((1+\cos\theta)\cos\frac{\pi}{n},\, (1+\cos\theta)\sin\frac{\pi}{n},\, \sin\theta\right)$$

によって定め，

$$X_n = \{x_n(\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi\},\quad Y_n = \{y_n(\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

とする．このとき，$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ の部分空間 X, Y を

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

として，写像 $f : X \to Y$ を $x_n(\theta) \mapsto y_n(\theta)$ によって定める． 写像 f は同相であるかどうか理由を付けて答えよ．