平成29年度

学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
(夏季募集)

入学試験問題
数　学

平成28年7月9日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から２問選択し，計４問について解答しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 a に対して

$$A = \begin{pmatrix} -1+a & 0 & 1 \\ -1+2a & 1-a & 1-2a \\ -1 & 0 & 1+a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-2a & a & -1+2a \\ 1-a & 0 & -1+2a \\ -a & a & a \end{pmatrix}$$

とおく。以下の問に答えよ．

(1) B の行列式を求めよ．

(2) 線形写像 $F_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $F_B : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ をそれぞれ

$$F_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad F_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$$

によって定める．このとき，$\operatorname{Im} F_A \cap \operatorname{Ker} F_B$ の次元およびその基底を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問に答えよ。

(1) 1 以上の定数 s について，数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt[3]{s}, \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{s + a_n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

により定める．このとき，数列 $\{a_n\}$ は収束することを示せ．

(2) 次の立体 A の体積を求めよ．

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq z^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2x, \quad z \geq 0\}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 位数 12 の群で，互いに同型でないものを 3 つ挙げよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ L/K を体の拡大とする． $\alpha \in L$ が $\alpha \in K(\alpha^2+1)$ を満たすならば，α は K 上代数的であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $F(x,y,z) = 1 + z^2 - (x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)$ によって次の空間図形 S を定める．

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\right\}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) S は滑らかな曲面であることを示せ．

(2) S によって囲まれた空間の閉領域を D とする．D の体積を求めよ．

(3) S 上の点 $(1,1,1)$ における S の接平面 H の方程式を求めよ．また，$\pi : S \to \mathbf{R}^2$ を xy 平面への射影とする．このとき，曲線 $\pi(H \cap S)$ について点 $(1,1)$ の近傍の様子を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 留数計算を用いて，次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^3+1}dx$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f \in C^1[0,\infty)$ かつ $f' \in L^1(0,\infty)$ とする.

(1) $\lim_{t\to\infty} f(t)$ が存在することを示せ.

(2)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$$

を示せ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 関数 $f(s)$ を

$$f(s) = \begin{cases} -s\log|s| & (s \neq 0) \\ 0 & (s = 0) \end{cases}$$

により定める.

(1) t_0, u_0 は実数で，$0 < |u_0| < 1$ とする．このとき，初期値問題

$$\frac{du}{dt}(t) = f(u(t)), \quad u(t_0) = u_0$$

の解を求めよ.

(2) $f(s)$ は $s = 0$ の近傍でリプシッツ連続ではないが，初期値問題

$$\frac{du}{dt}(t) = f(u(t)), \quad u(0) = 0$$

の解は $u(t) \equiv 0$ 以外存在しないことを示せ.

$\boxed{\mathbf{9}}$ X を位相空間とする．X の部分集合 A に対して

$$A^d = \bigl\{x \in X \mid x \text{ の任意の近傍 } N_x \text{ に対し } N_x \cap \bigl(A \setminus \{x\}\bigr) \neq \phi\bigr\}$$

とおく．このとき以下の問に答えよ.

(1) $\overline{A} = A \cup A^d$ を示せ.

(2) $X = \mathbf{R}$ のとき $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbf{N}\}$ を考える．このとき，A^d を求めよ.