平成28年度

学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（春季募集）

入学試験問題
数　学

平成28年2月22日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から2問選択し，計4問について解答しなさい．各問に対して1枚の解答用紙を用いること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $M_2 = M(2, \mathbb{R})$ を $(2,2)$ 型実行列全体のなす実ベクトル空間とする．実数 a に対して，写像 $f_a : M_2 \to M_2$ を

$$f_a(X) = AXA, \qquad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

によって定める．

(1) f_a が線型写像であることを示せ．

(2) M_2 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する f_a の表現行列，およびその階数を求めよ．

(3) $a = -1$ のとき，(2) で求めた行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問題 $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ のうち，1題を選んで答えよ．

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt[5]{e}$ の値を小数点以下5桁まで求めよ．ただし，e は自然対数の底であり，$e < 3$ であることを使ってよい．

$\boxed{\text{B}}$ 広義積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{\alpha}}, \qquad D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, y \geq x^2 \right\}$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$　自然数 m, n が互いに素のとき，$2^m - 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$　n が平方数でない正の整数ならば，多項式 $X^4 + 4n^2$ は $\mathbb{Z}$ 上既約であることを示せ.　ただし，$\mathbb{Z}$ は整数環を表す.

$\boxed{\mathbf{5}}$　a を正の実数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx$ の値を，留数計算を用いて求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$　関数

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 10(x^2 + y^2) + 6z^2 + 9$$

が定める可微分写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ について次の問いに答えよ.

(1) $f^{-1}(0)$ が滑らかな曲面 (トーラス) であることを示せ.

(2) $f^{-1}(0)$ に向きを与えて，$\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ について，$f^{-1}(0)$ 上の面積分

$$I = \iint_{f^{-1}(0)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$$

の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $a > 1,\, b > 0$ とし，関数 $f(t)$ は微分方程式

$$\frac{df(t)}{dt} = ae^{f(t)} - 1, \quad f(0) = b$$

をみたすとする.

(1) $f(t)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{t \uparrow T} f(t) = \infty$ となるような T を求めよ.

(3) 前問で求めた T に対して，$\displaystyle\lim_{t \uparrow T} \frac{f(t)}{\log(T - t)}$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n \in L^1(\mathbb{R})$ が $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に局所一様収束し，

$$C := \sup_n \int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)|dx < \infty$$

であるとする.

(1) 任意の正数 M に対して，$\displaystyle\int_{|x| \geq M} |f_n(x)|dx \leq \frac{C}{M} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

および $\displaystyle\int_{|x| \geq M} |f(x)|dx \leq \frac{C}{M}$ が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

$\boxed{\mathbf{9}}$ X を位相空間とするとき次の問に答えよ.

(1) A を X の開集合とするとき，$A \subset \mathrm{Int}(\overline{A})$ であることを示せ． また，等号が成り立たない例を1つ挙げよ.

(2) A, B を X の開集合とするとき，

$$A \cap B = \phi \quad \text{ならば} \quad \mathrm{Int}(\overline{A}) \cap \mathrm{Int}(\overline{B}) = \phi$$

であることを示せ.