平成28年度

学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

平成 27 年 7 月 11 日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から2問選択し，計4問について解答しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 複素数を成分とする m 次正方行列 A に対して，次の (a), (b) は同値であることを示せ．

(a) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^m$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

(b) A のすべての固有値 α について，$|\alpha| < 1$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数全体 $\boldsymbol{R}$ で定義された関数 $f(x)$ は次の条件を満たすと仮定する:

(i) $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ で連続である．

(ii) $f(x)$ はすべての $x \neq 0$ に対して微分可能である．

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = \alpha$ が成り立つ．

このとき，$f(x)$ は $x = 0$ でも微分可能で，$f'(0) = \alpha$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$　5次交代群の共役類の個数を求め，各共役類について代表元を一つずつあげよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$　多項式環 $\boldsymbol{Z}[x]$ の2つのイデアル

$$I = \left(x^3 + x + 1,\, 3\right), \qquad J = \left(x^3 + x + 1,\, 5\right)$$

のそれぞれについて，素イデアルかそうでないかを判定せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$　C^1 級関数 $F : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ が，点 (x_0, y_0, z_0) において $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ を満たし，かつ F の勾配ベクトル ∇F が (x_0, y_0, z_0) においてゼロベクトルでないとする．また，$A = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ とおく．

(1) 点 (x_0, y_0, z_0) のある近傍において，集合 A は，ある座標平面上の関数のグラフとして表されることを示せ．

(2) 点 (x_0, y_0, z_0) における A の接平面と勾配ベクトル $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ が直交することを示せ．

(3) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ とした場合に，点 $(2, 1, 2)$ における A の接平面の式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$　次の広義積分の値を留数計算を用いて求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1 + x + x^2} dx$$

$\boxed{\mathbf{7}}$　μ を $\boldsymbol{R}$ 上のルベーグ測度とする．f は $\boldsymbol{R}$ 上の非負値可測関数で，

$$X_s = \{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x) > s\}$$

とおくとき，任意の $s > 0$ に対して $\mu(X_s) < \infty$ を満たすものとする．このとき，$s > 0$ で定義される関数 $\mu(X_s)$ は右連続であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$　3 階線形微分方程式

$$u'''(t) - 2u''(t) + u'(t) = t^2$$

の一般解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$　以下の問いに答えよ．

(1) ハウスドルフ空間の例を一つ挙げ，そのハウスドルフ性を証明せよ．

(2) ハウスドルフ空間 X のコンパクト部分集合 S は閉集合であることを示せ．