平成27年度

学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題（数学）

平成26年7月15日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ にはかならず答えよ．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}$, $\cdots$, $\boxed{\mathbf{9}}$ から２問選択し，計４問について解答せよ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ A を複素数を成分とする n 次正方行列とする． 複素数 α に対して，$W(\alpha)$ を α に属する A の固有空間とし，

$$X(\alpha) = \{\ (A - \alpha E)\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\ \}$$

とおく． ただし，E は n 次単位行列である． A が $A^2 = 5A$ をみたすとき，以下を示せ．

(1) $X(0) \subset W(5)$.

(2) $X(5) \subset W(0)$.

(3) $X(0) \oplus X(5) = \mathbb{C}^n$.

また，A は対角化可能かどうか答えよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{2A}}$, $\boxed{\mathbf{2B}}$ の両方に答えよ．

$\boxed{\mathbf{2A}}$ 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$\boxed{\mathbf{2B}}$ p は正の定数とし， $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a, b]$ で正値連続で，

$$\max_{x \in I} f(x) = M$$

とする．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ p を素数とするとき，合同式

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

をみたす整数 x, y が存在することを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 $n > 1$ に対して，

$$R_n = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \not\equiv 0 \pmod n \right\}$$

とおく．ただし，$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ は，それぞれ，有理数体，整数環とする． 以下のことを示せ.

(1) R_n が $\mathbb{Q}$ の部分環であるためには，n が素数であることが必要十分である.

(2) R_5 の極大イデアルは単項イデアル (5) のみである.

(3) 包含写像 $\mathbb{Z} \to R_5$ は，可換環の同型 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong R_5/(5)$ を引き起こす.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数を成分とする 2 行 2 列の行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とする．実数 $s \neq 0$ をひとつ固定し，

$$N_s = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det X = s\}$$

とおけば，N_s は 3 次元の C^∞ 級多様体であることを証明せよ．さらに，実数 $t \neq 0$ に対して，N_t は N_s と C^∞ 級微分同相であることを証明せよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の広義積分の値を留数計算を用いて求めよ．ただし a は正の実数とする.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - e^{-x}} dx$$

$\boxed{\mathbf{7}}$　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は有界可測で，任意の実数 x に対して $f(x+1)=f(x)$ を満たすとする．

$$\langle f\rangle=\int_0^1 f(x)dx$$

とおくとき，任意の $g\in L^1(0,1)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)g(x)dx=\langle f\rangle\int_0^1 g(x)dx$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$　平面 $\mathbb{R}^2$ の第 1 象限内で，次の (a), (b) をともに満たす曲線

$$\mathrm{C}:\ y=\psi(x)$$

を求めよ．

(a)　曲線 C 上の任意の点を P とする．点 P における曲線 C の接線と，x 軸，y 軸の交点を，それぞれ，Q，R とするとき，$\overline{RP}=\overline{PQ}$ が成り立つ．

(b)　曲線 C は点 $(2,3)$ を通る．

$\boxed{\mathbf{9}}$　$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし，$f:(X,\mathcal{O})\to(X,\mathcal{O})$ を連続写像とする．点 $p\in X$ が f の <u>不動点</u> であるとは，$f(p)=p$ が成り立つことである．
$(X,\mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であれば，f の不動点全部の集合 Y は $(X,\mathcal{O})$ の閉集合であることを証明せよ．
（ヒント： 部分集合 $Z=\{p\in X\mid f(p)\neq p\}$ が $(X,\mathcal{O})$ の開集合であることを示せ.）