Sobolev norms of eigenfunctions on a closed Riemannian manifold

M^n を閉 Riemann 多様体とし，Δ を M^n 上の正定値の Laplacian とする．Laplacian Δ の区間 $[0,\lambda^2]$ におけるスペクトル射影作用素の積分核 $e(x,y,\lambda)$ を Δ のスペクトル関数と言い，区間 $[\lambda^2,(\lambda+1)^2]$ におけるスペクトル射影作用素を χ_λ で表す．このとき，次の重要な結果がある:

(ア) (Hörmander, 1968) $\lambda\to\infty$ のとき，漸近式 $e(x,x,\lambda)=C_n\lambda^n+O(\lambda^{n-1})$ が成り立つ．

(イ) (Sogge, 1988) $p\in[2,\infty]$, $\lambda\to\infty$ のとき，$\chi_\lambda : L^2(M)\to L^p(M)$ の写像ノルムは精確な評価 $O(\lambda^{\epsilon(n,p)})$ をもつ．

ここに C_n は n にのみ依存する正定数, $\epsilon(n,p)$ は n, p にのみ依存する正定数である．(ア) と (イ) はそれぞれ，多様体上の固有値の漸近的な性質と Bochner-Riesz 総和問題の研究に本質的な役割を果たした．波動方程式の手法を使って，(ア) と (イ) を一般化した:

(ア$'$) M のある十分小さい測地座標系の下で，任意の多重指数 α に対して，$\lambda\to\infty$ のとき，漸近式 $\partial_x^\alpha\partial_y^\alpha e(x,y,\lambda)|_{x=y}=C_{n,\alpha}\lambda^{n+2|\alpha|}+O(\lambda^{n+2|\alpha|-1})$ が成り立つ．ここに $C_{n,\alpha}$ は n,α にのみよる正定数である．

(イ$'$) $p\in[2,\infty]$, $\lambda\to\infty$ のとき，$\chi_\lambda : L^2(M)\to H^{k,p}(M)$ (k 階微分まで L^p 空間に入る関数の全体のなす Sobolev 空間) の写像ノルムは精密な評価は $O(\lambda^{\epsilon(n,p)+k})$ をもつ．

なお，定数 $C_{n,\alpha}$ の計算は geometric lattice problem との関連にも触れる．